

Dubtes freqüents d'Anàlisi I

Sitio: [Cursos IOC - Batxillerat](#)

Curso: Matemàtiques (autoformació IOC)

Libro: Dubtes freqüents d'Anàlisi I

Imprimido por: Invitado

Día: viernes, 11 de febrero de 2022, 21:10

Descripción



Tabla de contenidos

LÍMITS

- Límits laterals
- És el mateix límit que imatge?

ASÍMPTOTES

- Asímtotes verticals
- Asímtotes horitzontals
- Asímtota obliqua

DISCONTINUÏTATS

- Funcions amb valors absoluts
- Tipus de discontinuïtats

BOLZANO

- Puc aplicar Bolzano sempre?

TAXA DE VARIACIÓ MITJANA

- Què és la taxa de variació mitjana?

DERIVADA D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT

- Interpretació geomètrica
- Interpretació geomètrica de les derivades laterals
- Com trobar les derivades laterals

RECTA TANGENT

- Com trobar l'equació de la recta tangent

CÀLCUL DE DERIVADES

- Derivades de funcions que es redueixen a potències

MONOTONIA D'UNA FUNCIÓ

- Relació 1a derivada amb creixement i decreixement
- Sempre hi ha un extrem relatiu si s'anul·la la primera derivada?
- Com trobar els intervals de monotonia d'una funció?

CURVATURA D'UNA FUNCIÓ

- Còncava o convexa
- Sempre hi ha un punt d'inflexió si s'anul·la la segona derivada?
- Com trobar els intervals de curvatura d'una funció
- Estudi complet d'una funció
- Estudi complet d'una funció

LÍMITS



Límits laterals

Com puc calcular els límits laterals?

Per calcular el límit lateral d'una funció en $x = a$ cal substituir la x per aquest valor. Si dóna un nombre concret doncs aquest és el límit.

però si dóna una expressió de l'estil $\frac{k}{0}$ llavors cal mirar el signe d'aquest 0 substituint l'expressió que dóna el 0 per valors molt propers a $x=a$.

El resultat pot ser un nombre molt proper a 0 però positiu (0^+) o bé negatiu (0^-).

En aquest cas dependrà també del valor de k per decidir el signe del resultat final. Per exemple:

$$\frac{3}{0^+} = +\infty, \quad \frac{3}{0^-} = -\infty, \quad \frac{-3}{0^+} = -\infty \quad i \quad \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

Aneu en compte que l'infinit no té límits laterals. Una cosa és el nombre $+\infty$ i una altra el $-\infty$!

Exemple 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x}{x-1} = \frac{-2}{0}$$

Substituïm en l'expressió $x-1$ la x per un nombre molt proper a 1 per la seva dreta per exemple 1'000001.

$$1'000001 - 1 = 0'000001$$

veiem que dóna un nombre molt proper a zero i positiu (0^+) i per tant ja podem dir .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x}{x-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Exemple 2:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2x}{x-1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Exemple 3:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x}{x^2-1} = \frac{-2}{0}$$

Substituïm en l'expressió x^2-1 la x per un nombre molt proper a 1 per la seva dreta per exemple 0'99999.

$$(0'99999)^2 - 1 = -0'00002$$

veiem que dóna un nombre molt proper a zero i negatiu (0^-) i per tant ja podem dir .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x}{x^2-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Exemple 4:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+3}{4-x^2} = \frac{1}{0}$$

Substituïm en l'expressió $4-x^2$ la x per un nombre molt proper a -2 per la seva esquerra per exemple -2'000001.

$$4 - (-2'000001)^2 = -0'000004$$

veiem que dóna un nombre molt proper a zero i negatiu (0^-) i per tant ja podem dir .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+3}{4-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Exemple 5:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+3}{4-x^2} = \frac{1}{0}$$

Substituïm en l'expressió $4-x^2$ la x per un nombre molt proper a -2 per la seva dreta per exemple -1'99999.

$$4 - (-1'99999)^2 = 0'000004$$

veiem que dóna un nombre molt proper a zero i positiu (0^+) i per tant ja podem dir .

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+3}{4-x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



És el mateix límit que imatge?

No, no és el mateix.

Majoritàriament el límit coincideix amb la imatge però no sempre.

Exemple 1:

Observa la funció $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

Si de bon començament intentem trobar la imatge per $x=1$ veiem que no existeix ja que no es pot dividir per zero.

$$f(1) = \frac{1-1}{1^2-1} = \frac{0}{0} \text{ que no existeix } \rightarrow x=1 \text{ no és del domini de la funció}$$

Però en canvi si que existeix $f(0'9)$, $f(0'99)$, $f(0'999)$... i també $f(1'1)$, $f(1'01)$, $f(1'001)$...imatges pels valors de x propers a $x=1$

Aleshores la idea de límit és el nombre al que s'acosten les imatges quan x s'acosta al nombre on fem el límit

$$f(0'9) = 0'526315$$

$$f(0'99) = 0'502512$$

$$f(0'999) = 0'50025$$

$$f(0'9999) = 0'500025$$

$$f(0'9) = 0'526315$$

$$f(0'99) = 0'502512$$

$$f(0'999) = 0'50025$$

$$f(0'9999) = 0'500025$$

...

$$\left. \begin{array}{l} f(0'9) = 0'526315 \\ f(0'99) = 0'502512 \\ f(0'999) = 0'50025 \\ f(0'9999) = 0'500025 \\ \dots \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0'5$$

$$f(1'1) = 0'476149$$

$$f(1'01) = 0'497512$$

$$f(1'001) = 0'49975$$

$$f(1'0001) = 0'499975$$

...

$$\left. \begin{array}{l} f(1'1) = 0'476149 \\ f(1'01) = 0'497512 \\ f(1'001) = 0'49975 \\ f(1'0001) = 0'499975 \\ \dots \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0'5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0'5$$

Exemple 2:

Sigui la funció

$$f(x) = \begin{cases} 3x-7 & \text{si } x < 2 \\ x+3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

En aquest cas tenim $f(2) = 2+3 = 5$

Però el límit en $x=2$ no existeix ja que els límits laterals són diferents:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-7 = 6-7 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x+3 = 2+3 = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ no existeix}$$

Exemple 3: Donada la funció $f(x)=3x-4$ en aquest cas el límit coincideix amb la imatge per a qualsevol valor de la x

Exemple 4: Sigui la funció

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 2 \\ x+3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

En aquest cas tenim $f(2) = 2+3 = 5$

I a més el límit en $x=2$ existeix ja que els límits laterals coincideixen:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-1 = 6-1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x+3 = 2+3 = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

En aquest cas el límit en $x=2$ coincideix amb la imatge

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 5$$



ASÍMPTOTES



Asímtotes verticals

Com podem trobar les asímtotes verticals d'una funció?

Una funció té una asímtota vertical en $x = a$ quan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Majoritàriament, els possibles valors de x on pot passar això són els punts que no són del domini i els punts que sent del domini hi ha algun límit lateral que dona ∞

Un cop detectats aquests punts cal comprovar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

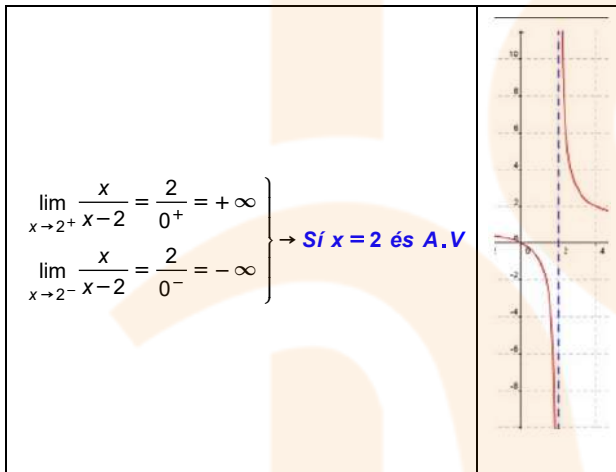
Per poder dibuixar la gràfica de la funció al voltant d'aquesta asímtota, cal fer els límits laterals. I en funció del resultat podem saber com van les branques de l'asímtota.

Exemple 1:

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

En primer lloc busquem el domini. $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

Per tant ara mirem si hi ha asímtota en $x=2$

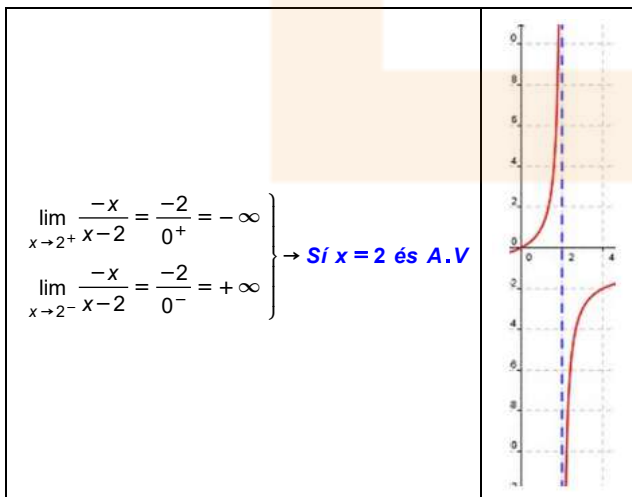


Exemple 2:

$$f(x) = \frac{-x}{x-2}$$

En primer lloc busquem el domini. $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

Per tant ara mirem si hi ha asímtota en $x=2$

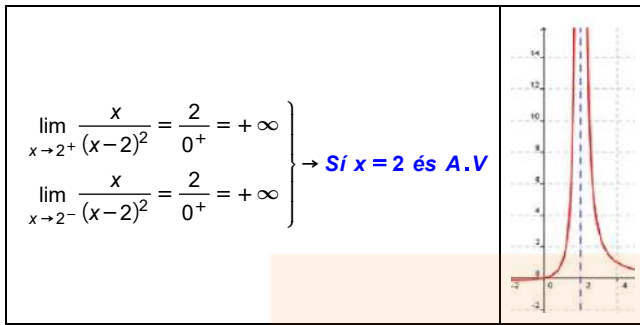


Exemple 3:

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$$

En primer lloc busquem el domini. $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

Per tant ara mirem si hi ha asímptota en $x=2$

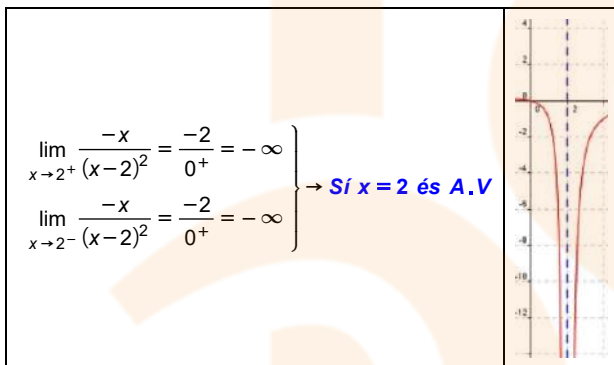


Exemple 4:

$$f(x) = \frac{-x}{(x-2)^2}$$

En primer lloc busquem el domini. $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{2\}$

Per tant ara mirem si hi ha asímptota en $x=2$



Exemple 5:

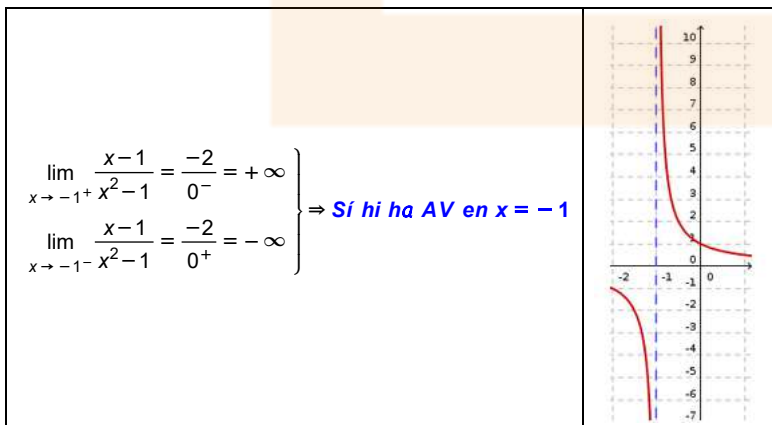
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

En primer lloc busquem el domini. $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Per tant en primer lloc mirem si hi ha asímptota en $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \text{ indet} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{No hi ha AV en } x=1$$

En segon lloc mirem si hi ha asímptota en $x=-1$



Asímtotes horitzontals

Com podem trobar les asímtotes horitzontals d'una funció?

Una funció té una asímtota horitzontal $y=k$ quan

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \quad \text{o bé} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k \quad (\text{o els dos límits donen } k)$$

Llavors:

- Si la funció és polinòmica: No pot tenir asímtotes horitzontals ja qualsevol d'aquests límits dona $+\infty$ o $-\infty$
- Si la funció és racional: és a dir del tipus $\frac{p(x)}{q(x)}$ on $p(x)$ i $q(x)$ són polinomis, aleshores dependrà del grau dels polinomis.

Per exemple :

$$\text{Si } f(x) = \frac{6x-2}{1-2x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x-2}{1-2x} = -3 \Rightarrow y = -3 \text{ és A.H de } f(x)$$

$$\text{Si } g(x) = \frac{2x}{x^2-3} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2-3} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ és A.H de } g(x)$$

$$\text{Si } h(x) = \frac{2x^3-4}{x^2-3} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3-4}{x^2-3} = \pm\infty \Rightarrow h(x) \text{ NO té A.H}$$

- Si en l'expressió de la funció hi ha una expressió exponencial: cal tenir en compte que,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases} \quad i \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}}$$

Per exemple :

$$\text{Si } g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ és A.H de } f(x) \text{ en el } +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}} = \frac{1}{0} = +\infty \Rightarrow \text{No hi ha A.H en el } +\infty$$

$$\text{Si } f(x) = \frac{e^x}{x^2-x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2-x} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ indet} = +\infty \Rightarrow \text{No hi ha A.H en el } +\infty$$

per resoldre la indeterminació $\frac{+\infty}{+\infty}$ hem tingut en compte que la funció exponencial és un infinitèssim d'ordre superior

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2-x} = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{1}{+\infty \cdot e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ és A.H de } f(x) \text{ en el } -\infty$$

Asímtota oblícua

Com puc saber si una funció té una asímtota oblícua?

Per saber si una funció $f(x)$ té una asímtota oblícua (A.O) cal seguir els següents passos:

1.- Fer el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ aleshores :

- Si dóna ∞ aleshores no hi ha A.O. En aquest cas ja no cal seguir
- Si dóna 0 vol dir que és una recta horitzontal (pendent 0) i per tant ja hauria sortit al buscar asímtotes horitzontals. En aquest cas ja no cal seguir
- En qualsevol altre cas dóna un nombre real. Aquest nombre serà la pendent de l'A.O i l'anomenarem $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$

2.- Fer el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$ aleshores :

- Si dóna ∞ aleshores no hi ha A.O. En aquest cas ja no cal seguir
- En qualsevol altre cas dóna un nombre real. Aquest nombre serà l'ordenada a l'origen de l'A.O i l'anomenarem $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$

3.- Un cop hem trobat m i b l'asímtota oblícua serà la recta que té per equació $y = mx + b$

Exemple 1:

Sigui $f(x) = \frac{2x-5x^2}{x-2}$

1. $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x-5x^2}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5x^2}{x^2-2x} = -5 \rightarrow$ pot haver-hi A.O. Per tant seguim amb el pas 2

2. $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5x^2}{x-2} - (-5x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5x^2}{x-2} + \frac{5x(x-2)}{x-2} =$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5x^2}{x-2} + \frac{5x^2-10x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5x^2+5x^2-10x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8x}{x-2} = -8$

Per tant la recta $y = -5x - 8$ és A.O de la funció $f(x)$

Exemple 2:

Sigui $g(x) = \frac{2x-5}{x-2}$

1. $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x-5}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5}{x^2-2x} = 0 \rightarrow$ No hi ha A.O. per tant no cal seguir amb el pas 2

Exemple 3:

Sigui $h(x) = \frac{2x^3}{x-2}$

1. $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2-2x} = \infty \rightarrow$ No hi ha A.O. per tant no cal seguir amb el pas 2

DISCONTINUITATS



Funcions amb valors absoluts

Com puc expressar una funció amb valors absoluts com una funció a trossos?

Per poder trobar l'expressió d'una funció amb valors absoluts com una funció a trossos i sense valors absoluts cal seguir bàsicament els següents passos:

1. Esbrinar per a cada valor absolut quan l'expressió de dins és positiva i quan és negativa
2. Els valors on l'expressió doni positiva podem treure el valor absolut doncs queda igual
3. Els valors on l'expressió doni negativa podem treure el valor absolut canviant el signe de tota aquesta expressió
4. Escriure la funció a trossos equivalent amb el nombre de trossos que haguem trobat.

Exemple1

Sigui la funció $f(x) = |6 - 2x|$

Anem a seguir les passes descrites abans:

1r pas:

$$6 - 2x \geq 0 \rightarrow 6 \geq 2x \rightarrow \frac{6}{2} \geq x \rightarrow 3 \geq x$$

per tant si $x \in (-\infty, 3]$ llavors $6 - 2x \geq 0$
 si $x \in (3, +\infty)$ llavors $6 - 2x < 0$

2n pas:

si $x \in (-\infty, 3]$ llavors $6 - 2x \geq 0$ i per tant la funció queda igual $f(x) = 6 - 2x$

3r pas:

si $x \in (3, +\infty)$ llavors $6 - 2x < 0$ i per tant la funció queda canviada de signe $f(x) = -(6 - 2x) = -6 + 2x$

4t pas:

$$f(x) = \begin{cases} 6 - 2x & \text{si } x \leq 3 \\ -6 + 2x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Exemple2

Sigui la funció $f(x) = 3|x^2 - 4|$

Observem en primer lloc que entre el 3 i el valor absolut hi ha un producte (implícit) $f(x) = 3 \cdot |x^2 - 4|$

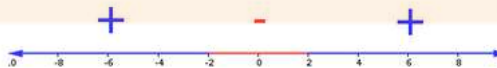
Anem a seguir les passes descrites abans:

1r pas:

$$x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

Ara col·loquem els nombres -2 i 2 i veiem que la recta real queda dividida en tres trossos.

Haurem de mirar per cada tros si $x^2 - 4$ és positiu o negatiu. Per això agafem un valor dins de cada tros i substituïm



2n pas:

si $x \in (-\infty, -2]$ llavors $x^2 - 4 \geq 0$ i per tant la funció queda igual $f(x) = 3 \cdot (x^2 - 4) = 3x^2 - 12$

si $x \in [2, +\infty)$ llavors $x^2 - 4 \geq 0$ i per tant la funció queda igual $f(x) = 3 \cdot (x^2 - 4) = 3x^2 - 12$

3r pas:

si $x \in (-2, 2)$ llavors $x^2 - 4 < 0$ i per tant la part del valor absolut queda canviat de signe

$$f(x) = 3 \cdot (-(x^2 - 4)) = -3x^2 + 12$$

4t pas:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12 & \text{si } x \leq -2 \\ -3x^2 + 12 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 3x^2 - 12 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



Tipus de discontinuïtats

Com puc distingir entre els diferents tipus de discontinuïtat?

Hi ha tres tipus de discontinuïtat: evitable, de salt finit i de salt infinit o asimptòtica.

Per definició una funció és contínua en $x=a$ si es compleixen les tres condicions següents:

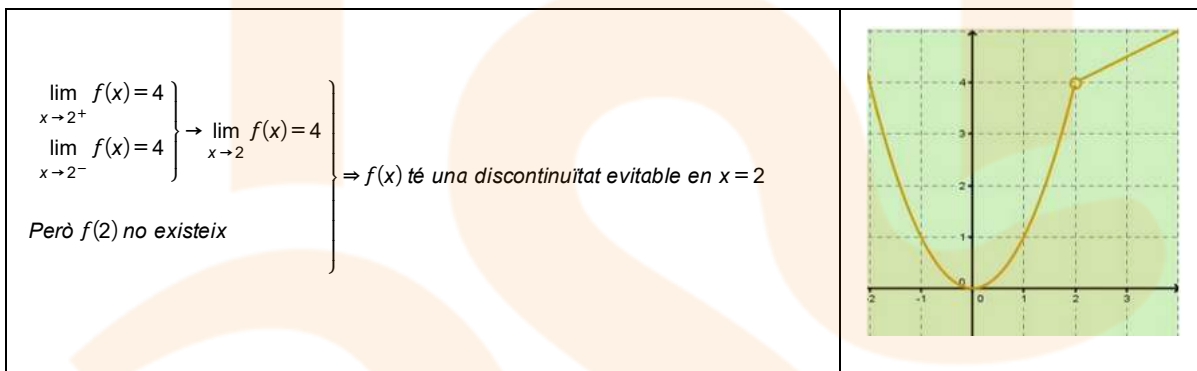
1. $f(a)$ existeix
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existeix
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Depèn de la o les condicions que no es compleixin tindrem un tipus de discontinuïtat o un altre

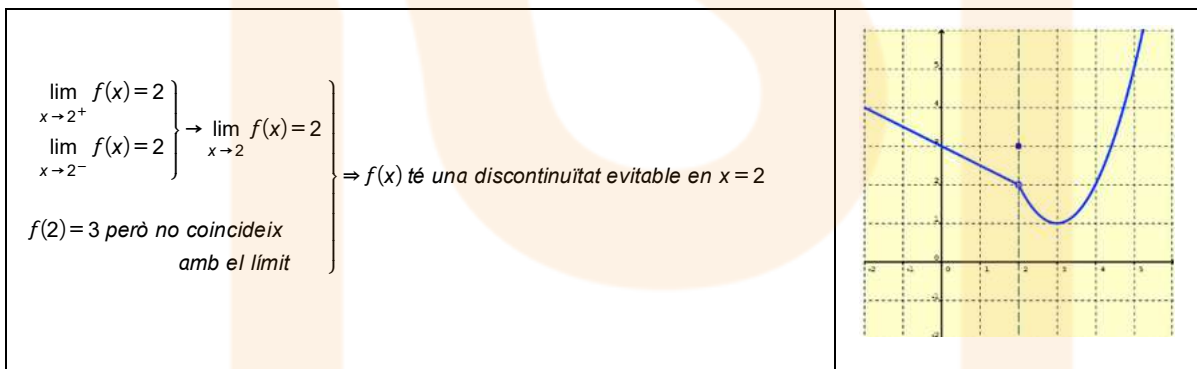
Cas 1: Discontinuïtat evitable en $x=a$

El límit en $x=a$ existeix i és finit (límits laterals coincideixen) però no coincideix amb la imatge $f(a)$ (ja sigui perquè no n'hi ha o bé perquè és un nombre diferent).

Exemple 1:



Exemple 2:



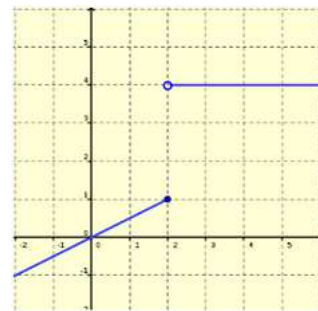
Cas 2: Discontinuïtat de salt finit en $x=a$

El límit en $x=a$ no existeix perquè els laterals són diferents. I a més són finits.

La imatge $f(a)$ pot existir o no (no importa)

Exemple 3:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \nexists \quad \left. \begin{array}{l} f(2) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ té una discontinuïtat de salt finit en } x = 2$$



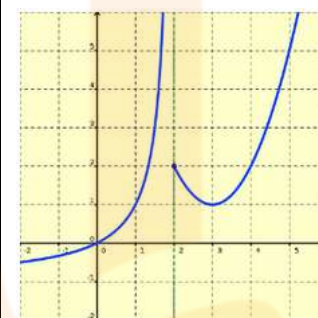
Cas 3: Discontinuitat asimptòtica o de salt infinit en $x=a$

Un dels límits laterals en $x=a$ o els dos dona ∞

La imatge $f(a)$ pot existir o no (no importa)

Exemple 4:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \nexists \quad \left. \begin{array}{l} f(2) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ té una discontinuïtat asimptòtica en } x = 2$$



BOLZANO



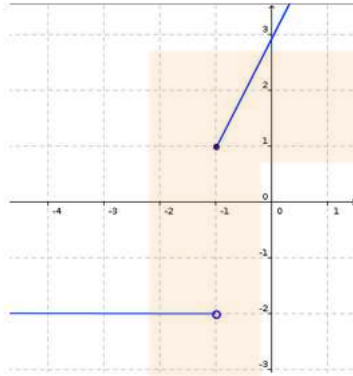
Puc aplicar Bolzano sempre?

Perquè no puc aplicar Bolzano si la funció no és contínua en l'interval tancat?

El teorema de Bolzano diu que si una funció $f(x)$ és contínua en un interval tancat $[a,b]$ i en els extrems d'aquests pren valors de diferent signe ($f(a) \cdot f(b) < 0$), aleshores hi ha almenys un valor $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$

Exemple 1:

Ara considerem la funció $f(x)$ que té per gràfica



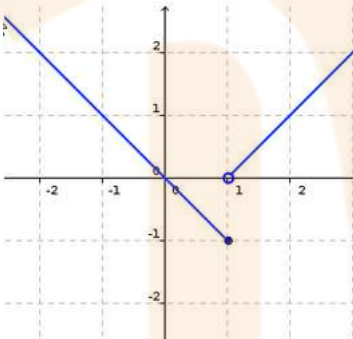
Veiem que $f(0) \cdot f(-2) = 3 \cdot (-2) < 0$ però en canvi no existeix cap arrel en l'interval $(-2,0)$.

Això és degut a que la funció no és contínua en $[-2,0]$ doncs en $x = -1$ presenta una discontinuïtat de salt.

Per tant al no complir-se una de les condicions o hipòtesis del teorema no podem garantir que existeixi un zero de la funció entre -2 i 0

Exemple 2:

Ara considerem la funció $f(x)$ que té per gràfica



Veiem que $f(1) \cdot f(3) = (-1) \cdot 2 < 0$ però en canvi no existeix cap arrel en l'interval $(1,3)$.

Això és degut a que la funció no és contínua en $[1,3]$ doncs en $x = 1$ presenta una discontinuïtat de salt.

Per tant al no complir-se una de les condicions o hipòtesis del teorema no podem garantir que existeixi un zero de la funció entre 1 i 3

TAXA DE VARIACIÓ MITJANA



Què és la taxa de variació mitjana?

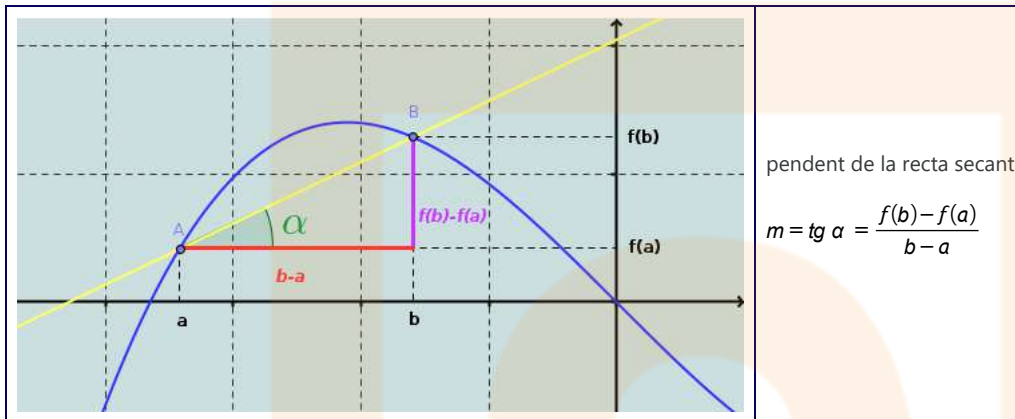
què és la taxa de variació mitjana i quina és la seva interpretació geomètrica?

Sigui una funció $f(x)$ i dos punts $A=(a, f(a))$ i $B=(b, f(b))$ de la seva gràfica

La taxa de variació mitjana d'una funció $f(x)$ entre dos valors $x=a$ i $x=b$ (amb $a < b$) és la següent divisió:

$$TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si fem un gràfic de la situació veiem que $TMV[a,b]$ és el pendent de la recta secant que passa pels punts $A=(a, f(a))$ i $B=(b, f(b))$



Exemple 1

Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - 2x - 1$.

Volem calcular la taxa de variació mitjana entre els valors $x = -2$ i $x = 3$

$$TVM[-2,3] = \frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}$$

calculem $f(-2)$ i $f(3)$:

$$f(-2) = \frac{1}{5} \cdot 4 - 2(-2) - 1 = \frac{4}{5} + 4 - 1 = \frac{4}{5} + 3 = \frac{4}{5} + \frac{15}{5} = \frac{19}{5}$$

$$f(3) = \frac{1}{5} \cdot 9 - 6 - 1 = \frac{9}{5} - 7 = \frac{9}{5} - \frac{35}{5} = -\frac{26}{5}$$

$$\text{Aleshores } TVM[-2,3] = \frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \frac{-\frac{26}{5} - \frac{19}{5}}{5} = \frac{-\frac{45}{5}}{5} = \frac{-9}{5}$$

DERIVADA D'UNA FUNCIÓ EN UN PUNT

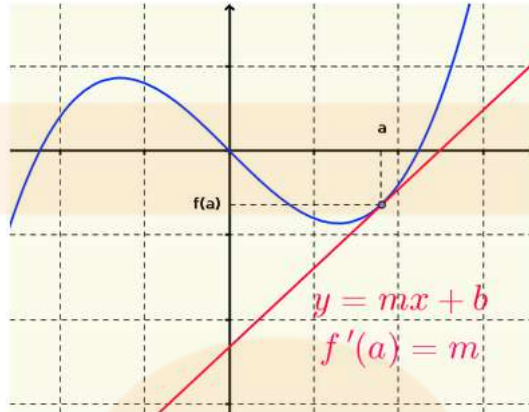


Interpretació geomètrica

Què representa geomètricament la derivada d'una funció en un punt?

Imaginem una funció $f(x)$ i un punt de la gràfica d'aquesta funció $(a, f(a))$ on hi hagi una única recta tangent. Sigui $y = mx + b$ l'equació d'aquesta recta tangent.

Aleshores $f'(a) = m$



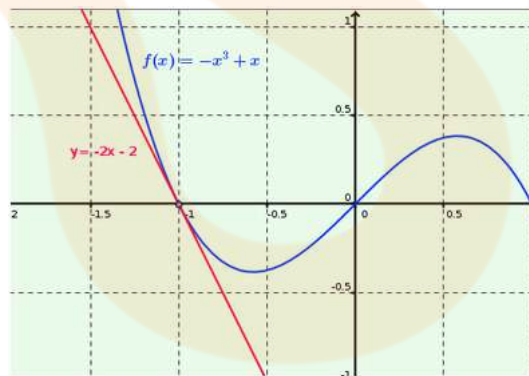
veiem un parell d'exemples que siguin prou il·lustratius

Exemple 1:

Sigui $f(x) = -x^3 + x$

Calculem $f'(x) = -3x^2 + 1$ i $f'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 1 = -3 + 1 = -2$

Comprovem que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt $(-1, f(-1))$ té pendent igual a -2

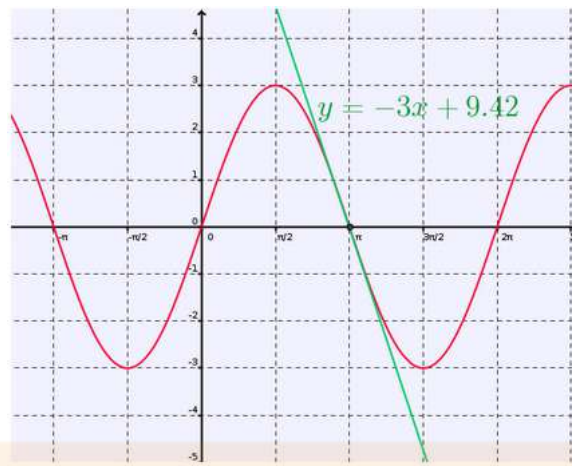


Exemple 2:

Sigui $f(x) = 3\sin x$

Calculem $f'(x) = 3\cos x$ i $f'(\pi) = 3\cos \pi = 3 \cdot (-1) = -3$

Comprovem que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt $(\pi, f(\pi))$ té pendent igual a -3



Interpretació geomètrica de les derivades laterals

Què son les derivades laterals ?

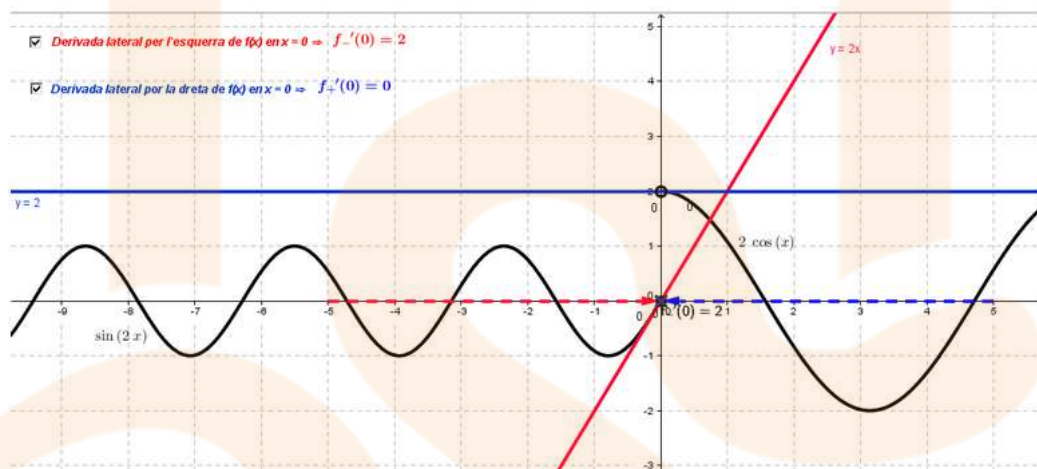
En les funcions definides a trossos de vegades pot passar que en els punts on la funció canvia d'expressió no sol haver-hi una sola recta tangent ja que depèn del tros de gràfica que considerem (el tros de l'esquerra o el de la dreta). Aleshores cadascuna d'aquestes rectes tangents té una pendent que pot ser igual o diferent. Són el que anomenem les derivades laterals per l'esquerra o per la dreta. I les escrivim $f'_-(a)$ i $f'_+(a)$

Aleshores:

- Si $f'_-(a) = f'_+(a)$ i la funció és contínua en $x=a$ diem que existeix la derivada $f'(a)$ i $f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$
- Si $f'_-(a) \neq f'_+(a)$ llavors diem que no existeix la derivada en $x=a$ (encara que sigui contínua en aquest punt)

Exemple 1:

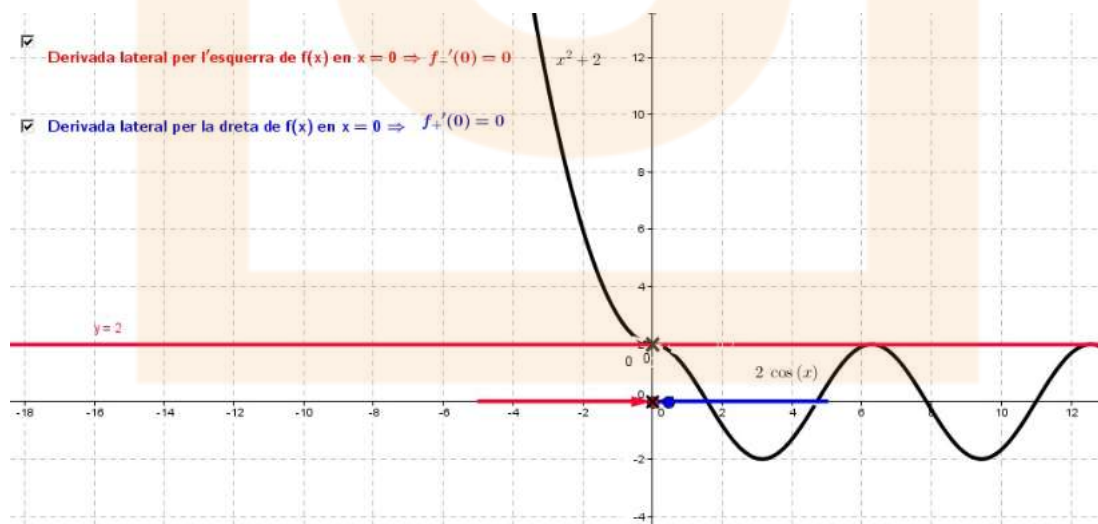
Imaginem la funció $f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ 2\cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$



Podeu veure com trobem obtenim les rectes tangents si aneu [a aquest enllaç](#) i desplaçeu els botons vermell i blau que s'acosten a $x=0$

Exemple 2:

Imaginem la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\cos x & \text{si } x > 0 \end{cases}$



Podeu veure com trobem obtenim les rectes tangents si aneu [a aquest enllaç](#) i desplaçeu els botons vermell i blau que s'acosten a $x=0$

Com trobar les derivades laterals

Com puc trobar les derivades laterals per un valor de x concret?

La major part de les derivades laterals les busquem en funcions definides a trossos i en els punts on hi ha un trencament de la funció.

Els passos a seguir són les següents:

1.- Buscar la funció $f'(x)$ derivant cada expressió de cada tros i traient la condició d'igualtat (si hi ha $\leq$ posem $<$ i si hi ha $\geq$ hi posem $>$) ja que pot ser que en els punt de trencament no existeixi la derivada ja sigui perquè no és contínua o perquè les derivades laterals no coincideixen.

2.- Per fer les derivades laterals fem el límit de l'expressió derivada que correspongui.

Amb això ja tindriem les derivades laterals. Si a més a més aquestes derivades coincideixen i la funció és contínua en aquell punt llavors també serà derivable en aquest punt i podrem posar el "=" en la condició de $f'(x)$ que correspongui.

Exemple 1:

$$\text{Sigui la funció } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x \leq 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Volem trobar $f'_-(2)$ i $f'_+(2)$

1.- Busquem l'expressió de $f'(x)$ i posem $<$ enlloc de $\leq$ (potser provisionalment)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2.- Ara busquem $f'_-(2)$ i $f'_+(2)$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 3 = \boxed{1}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = \boxed{2}$$

Ara ja hem acabat i el que veiem és que $f(x)$ no és derivable en $x=2$ ja que les derivades laterals no coincideixen.

Per tant podem dir que la funció derivada de $f(x)$ ve donada per l'expressió $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Exemple 2:

$$\text{Sigui la funció } g(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Volem trobar $g'_-(2)$ i $g'_+(2)$

1.- Busquem l'expressió de $f'(x)$ i posem $<$ enlloc de $\leq$ (potser provisionalment)

$$g'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

2.- Ara busquem $g'_-(2)$ i $g'_+(2)$

$$g'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 1 = \boxed{3}$$

$$g'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3 = \boxed{3}$$

Ara ja hem acabat de buscar les derivades laterals.

A part d'això el que veiem és que $f(x)$ sí podria ser derivable en $x=2$ ja que les derivades laterals coincideixen.

Per poder dir que hi ha derivada en $x=2$ hauríem de mirar que sigui contínua que sí que ho és ja que :

1 $\rightarrow g(2)$ existeix i val 2

2 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ també existeix i val també 2 ja que els límits laterals coincideixen

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - x = 4 - 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x - 4 = 6 - 4 = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$$

I per tant $g'(2) = g_-'(2) = g_+'(2) = 3$

Per tant podem dir que la funció derivada de $g(x)$ ve donada per l'expressió $g'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ (posem el "=" ja que existeix derivada en $x=2$)



RECTA TANGENT



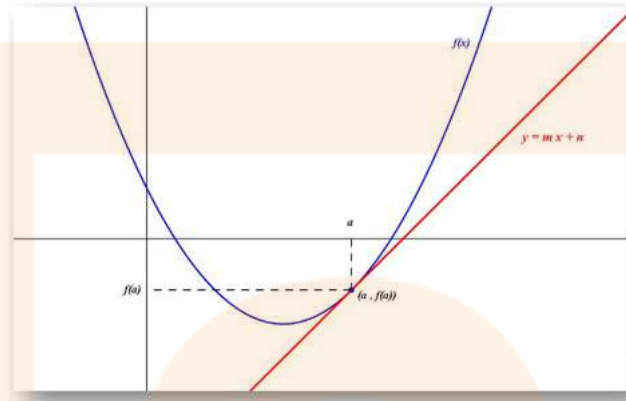
Com trobar l'equació de la recta tangent

Quines passes haig de seguir per trobar la recta tangent?

Imaginem que ens demanen trobar l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en $x=a$

Els passos a seguir són les següents:

1. Buscar el punt que correspon a la gràfica de $f(x)$ per $x=a$. És a dir cal buscar la imatge d'a $f(a)$. Llavors tenim que el punt de coordenades $A=(a, f(a))$ és el nostre punt de tangència. Aquest punt serà de la gràfica de $f(x)$ i també un punt de la recta tangent.



2. Aquesta recta tangent que busquem té una equació del tipus $y = mx + n$. Cal trobar **m** i **n**

3. La pendent **m** coincideix amb $f'(a)$. Fem doncs $f'(x)$ i substituïm per $x=a$

4. Per trobar **n** sols cal substituir la **m** trobada i la **x** i la **y** pel punt de tangència. Després ens queda una equació on podem trobar el valor de **n**

$$f(a) = m \cdot a + n$$

Amb els valors **m** i **n** trobats ja tinc l'equació de la recta tangent en el punt $(a, f(a))$

Exemple 1:

Volem trobar l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$ en $x = -1$

1. Trobem el punt de tangència $(-1, f(-1)) = (-1, -3)$

2. La recta que busquem té per equació $y = mx + n$

3. Per buscar el valor de **m** calculem $f'(x)$ i després substituïm la **x** per -1

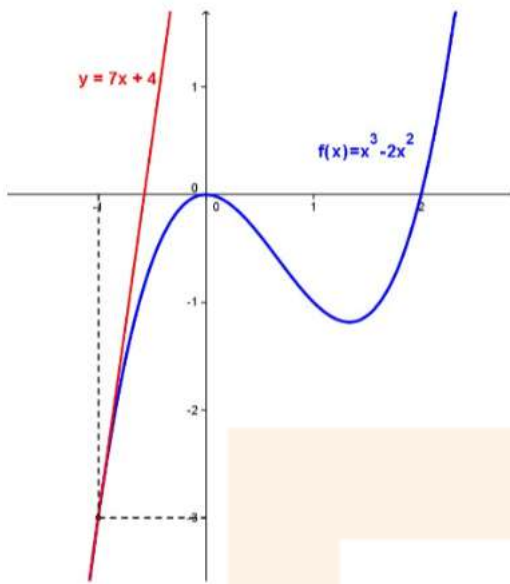
$$f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) = 3 + 4 = 7$$

4. Substituïm **m** per 7 i la (x, y) pel punt de tangència $(-1, -3)$

$$-3 = 7(-1) + n \rightarrow -3 = -7 + n \rightarrow -3 + 7 = n \rightarrow 4 = n$$

Per tant l'equació de la recta tangent és $y = 7x + 4$

Veiem aquest resultat gràficament



CÀLCUL DE DERIVADES



Derivades de funcions que es redueixen a potències

Com puc fer més fàcil el càlcul de la derivada de certes funcions?

Hi ha funcions que abans de derivar-les és millor que fem un petit retoc en la seva expressió. Aquest és el cas d'una funció que la seva expressió es pot reduir a una sola potència o a suma o resta de potències.

Si tenim expressada la funció de la manera $f(x) = x^n$ sempre serà més fàcil de derivar que no si la tenim com a divisió de potències per exemple.

Exemple 1:

Imagina que hem de derivar la funció $f(x) = \frac{x^5}{\sqrt[4]{x^3}}$. Tenim dues maneres de fer-ho:

Manera més complicada:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^5}{\sqrt[4]{x^3}} &\rightarrow f'(x) = \frac{5x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3} - x^5 \cdot \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}}{(\sqrt[4]{x^3})^2} = \frac{5x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3} - \frac{3x^5}{4\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[4]{x^6}} = \frac{5x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot 4\sqrt[4]{x} - 3x^5}{4\sqrt[4]{x^6}} = \\ &= \frac{20x^4 \cdot \sqrt[4]{x^4} - 3x^5}{4\sqrt[4]{x^6}} = \frac{20x^4 \cdot x - 3x^5}{4\sqrt[4]{x^6}} = \frac{17x^5}{4\sqrt[4]{x^6}} = \frac{17x^5}{\sqrt[4]{x^6} \cdot 4\sqrt[4]{x}} = \frac{17x^5}{4\sqrt[4]{x^7}} = \frac{17x^5}{4x \cdot \sqrt[4]{x^3}} = \frac{17x^4}{4\sqrt[4]{x^3}} = \\ &= \frac{17x^4 \cdot \sqrt[4]{x}}{4\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{17x^4 \cdot \sqrt[4]{x}}{4x} = \frac{17x^3 \cdot \sqrt[4]{x}}{4} = \frac{17}{4} x^3 \cdot \sqrt[4]{x} \end{aligned}$$

Manera més fàcil: primer arreglem l'expressió de la funció abans de derivar

$$f(x) = \frac{x^5}{\sqrt[4]{x^3}} = x^5 \cdot x^{-\frac{3}{4}} = x^{\frac{17}{4}} \rightarrow f'(x) = \frac{17}{4} x^{\frac{17}{4}-1} = \frac{17}{4} x^{\frac{13}{4}} = \frac{17\sqrt[4]{x^{13}}}{4} = \frac{17}{4} x^3 \cdot \sqrt[4]{x}$$

Exemple 2:

Imagina que hem de derivar la funció $f(x) = \frac{2}{x^4} - \sqrt[5]{x^2} - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$. La manera més senzilla de fer aquesta derivada és primer arreglant l'expressió de la funció abans de derivar

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{x^4} - \sqrt[5]{x^2} - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = 2x^{-4} - x^{\frac{2}{5}} - 3x^2 + x^{-\frac{1}{6}} \\ f'(x) &= (-4) \cdot 2x^{-5} - \frac{2}{5} x^{\frac{2}{5}-1} - 6x + \left(-\frac{1}{6}\right) x^{-\frac{1}{6}-1} = -8x^{-5} - \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} - 6x - \frac{1}{6} x^{-\frac{7}{6}} = \\ &= -8x^{-5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}} - 6x - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}} = \boxed{-\frac{8}{x^5} - \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - 6x - \frac{1}{6\sqrt[6]{x^7}}} \end{aligned}$$

MONOTONIA D'UNA FUNCIÓ



Relació 1a derivada amb creixement i decreixement

Què té a veure la derivada d'una funció en un punt amb que la funció creixi o decreixi en aquest punt?

Doncs hi ha una relació total.

Mireu les següents gràfiques de funcions i observeu el pendent de la recta tangent en el punt dibuixat.

$f(x)$ és estrictament creixent en el punt A (en $x = 1$) i $f'(1) = 2 > 0$	$g(x)$ és estrictament decreixent en el punt B (en $x = 2$) i $f'(2) = -4 < 0$	$h(x)$ és estrictament decreixent en el punt C (en $x = -1.5$) i $h'(-1.5) = -2.38 < 0$ $h(x)$ és estrictament creixent en el punt D (en $x = 0.5$) i $h'(0.5) = 0.65 > 0$

La relació que es compleix entre derivada i creixement és la següent :

- Si $f'(a) > 0 \rightarrow f(x)$ és estrictament creixent en $x = a$
- Si $f'(a) < 0 \rightarrow f(x)$ és estrictament decreixent en $x = a$

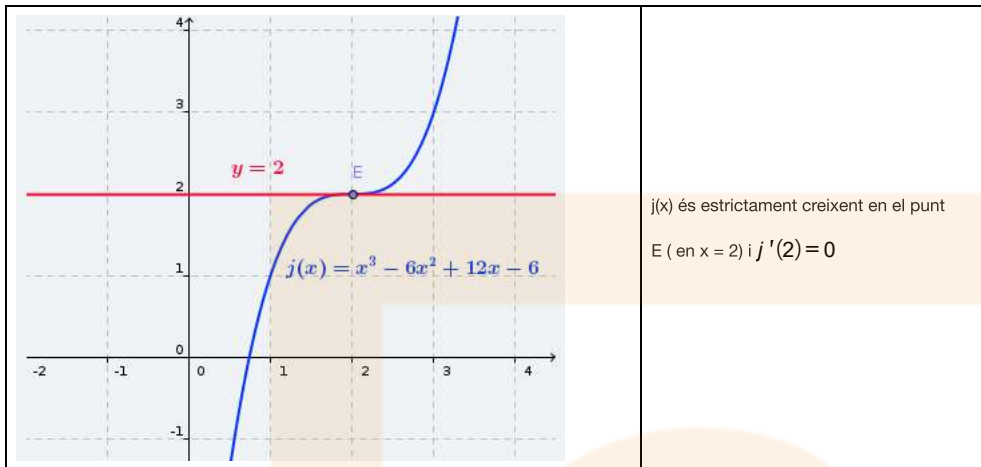
Al contrari no té perquè ser cert. En el següent exemple veureu que si una funció és estrictament creixent en un punt $x=a$ no implica que $f'(a) > 0$

	$j(x)$ és estrictament creixent en el punt E (en $x = 2$) i $f'(2) = 0$
--	--

Sempre hi ha un extrem relatiu si s'anul·la la primera derivada?

Sempre hi ha un extrem relatiu si s'anul·la la primera derivada?

Això no és sempre cert. Mireu aquest exemple

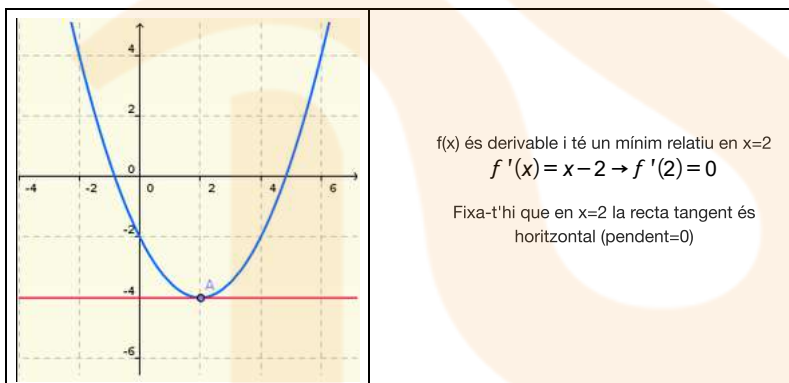


El que sí que és cert és que si en un punt hi ha un extrem relatiu i la funció és derivable llavors la derivada en aquest punt dona 0

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ té un extrem relatiu (màxim o mínim) en } x = a \\ f(x) \text{ és derivable en } x = a \end{array} \right\} \Rightarrow f'(a) = 0$$

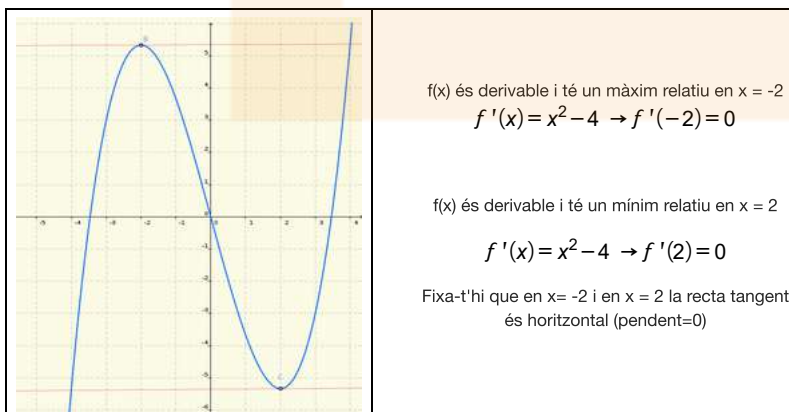
Exemple 1:

Segui la funció $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.



Exemple 2:

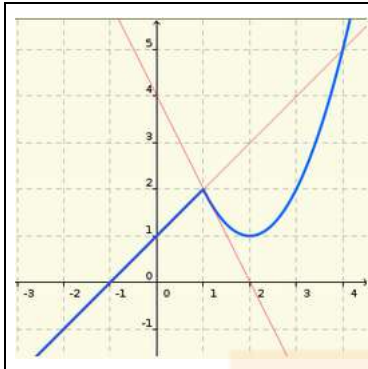
Segui la funció $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.



Exemple 3:

Aquí podeu trobar un cas on hi ha un extrem relatiu però que no existeix la derivada

Sigui la funció $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2-4x+5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



$f(x)$ **NO** és derivable ex $x = 1$ però **SÍ** té un màxim relatiu en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x-4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(1) = \nexists$$

Fixa-t'hi que en $x = 1$ la recta tangent no és única (les derivades laterals són diferents)

Com trobar els intervals de monotonia d'una funció?

Com trobar els intervals de monotonia d'una funció?

Per trobar els intervals de creixement i decreixement d'una funció i els seus extrems relatius cal seguir els següents passos:

1. Trobar el domini de la funció $f(x)$. Els punts que no siguin del domini després els haurem de tenir en compte en el pas 4
2. Trobar la funció derivada $f'(x)$
3. Igualar la derivada a zero i resoldre aquesta equació. Amb aquest pas trobarem el valor de la x dels possibles extrems relatius
4. Col·loquem damunt la recta real els valors trobats en les passes 1 i 3 (valors de la x que no són del domini i possibles extrems relatius) de manera que la recta ens queda dividida en intervals.
5. Per a cada interval trobat cal comprovar si la funció és creixent o decreixent. Per això sols cal agafar un valor de $x = x_0$ que estigui dins l'interval i substituir en la funció $f'(x)$:
 - Si $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ la funció és creixent en l'interval
 - Si $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ la funció és decreixent en l'interval
6. En funció del pas anterior decidir si els punts trobats en el pas 3 són màxim relatiu, mínim relatiu o cap de les dues coses.
7. Els punts que no són del domini mai poden ser ni màxim relatiu ni mínim relatiu. Són punts de discontinuïtat

Exemple 1 :

Anem a trobar els intervals de creixement, decreixement i els extrems relatius de la funció $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

1. $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

2. $f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 1) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x^5 - 4x^3 - 2x^5}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^5 - 4x^3}{(x^2 - 1)^2}$

3. $\frac{2x^5 - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow 2x^5 - 4x^3 = 0 \rightarrow 2x^3(x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x^3 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 - 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \rightarrow x_2 = \sqrt{2} \text{ i } x_3 = -\sqrt{2} \end{cases}$

4. Col·loquem damunt la recta real els valors $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, $x_4 = -1$ i $x_5 = 1$



Obtenim doncs els intervals: $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \sqrt{2})$ i $(\sqrt{2}, +\infty)$

5. Per a cada interval trobat agafem un valor de $x = x_0$ que estigui dins l'interval i substituïm en la funció $f'(x)$:

$$f'(-2) = \frac{2(-2)^5 - 4(-2)^3}{((-2)^2 - 1)^2} = \frac{-64 + 32}{9} = -\frac{32}{9} < 0$$

$$f'(2) = \frac{2 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2^3}{(2^2 - 1)^2} = \frac{64 - 32}{9} = \frac{32}{9} > 0$$

$$f'(-1.1) = \frac{2(-1.1)^5 - 4(-1.1)^3}{((-1.1)^2 - 1)^2} = 47.69 > 0$$

$$f'(1.1) = \frac{2(1.1)^5 - 4(1.1)^3}{((1.1)^2 - 1)^2} = -47.69 < 0$$

$$f'(0.5) = \frac{2(0.5)^5 - 4(0.5)^3}{((0.5)^2 - 1)^2} = -0.78 < 0$$

$$f'(-0.5) = \frac{2(-0.5)^5 - 4(-0.5)^3}{((-0.5)^2 - 1)^2} = 0.78 > 0$$

$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
------------------------	-------------	-------------------	------	-----------	-----	----------	-----	-----------------	------------	-----------------------

	MÍNIM		PUNT DISC		MÀXIM		PUNT DISC		MÍNIM	
$f'(-2) < 0$		$f'(-1.1) > 0$		$f'(-0.5) > 0$		$f'(0.5) < 0$		$f'(1.1) < 0$		$f'(2) > 0$

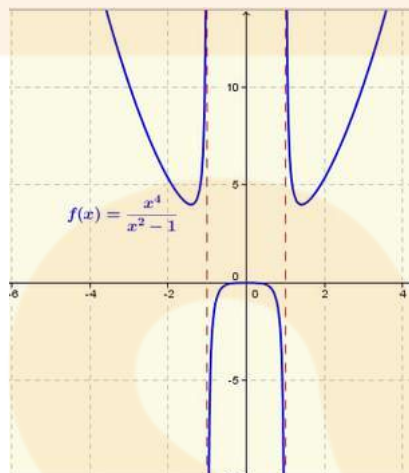
6. Els extrems relatius són:

Mínim relatiu en $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}, 4)$ i en $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2})) = (\sqrt{2}, 4)$

Màxim relatiu en $(0, f(0)) = (0, 0)$

7. En $x=-1$ i en $x=1$ hi ha discontinuïtats

Comprovem el resultat amb la gràfica de la funció:



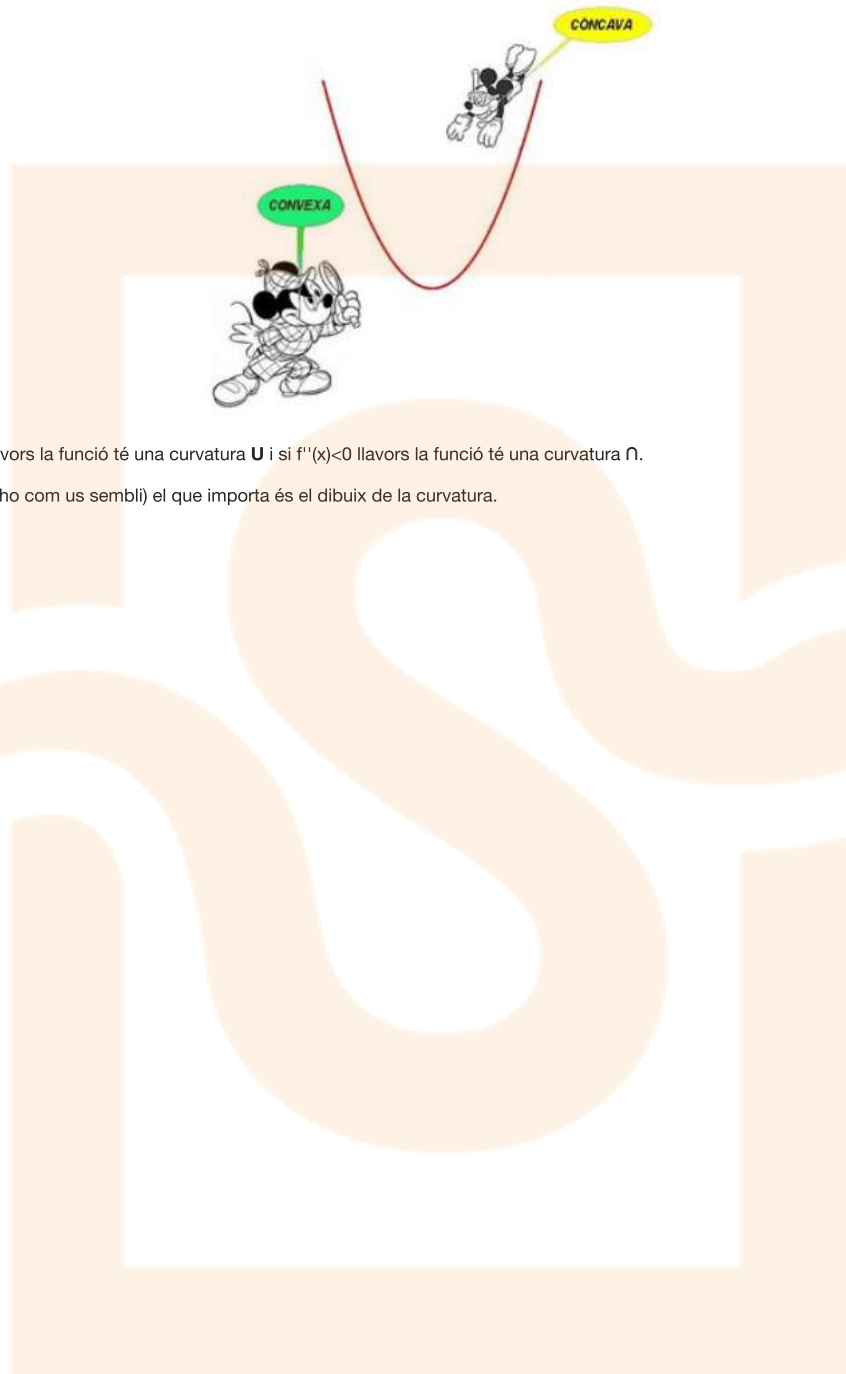
CURVATURA D'UNA FUNCIÓ



Còncava o convexa

Una funció còncava té forma de U o de $\cap$?

Aquesta és una pregunta que es presenta sovint ja que depèn del llibre que mirem còncava és U o $\cap$. Amb això no es posen d'acord ja que depèn de per on es miri per l'interior de la corba o per l'exterior)



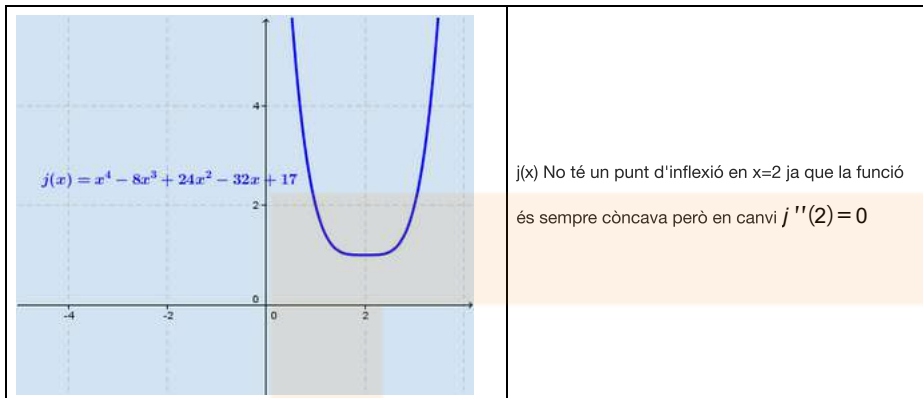
L'important és que si $f''(x) > 0$ llavors la funció té una curvatura **U** i si $f''(x) < 0$ llavors la funció té una curvatura $\cap$.

No importa el nom (anomeneu-ho com us sembli) el que importa és el dibuix de la curvatura.

Sempre hi ha un punt d'inflexió si s'anul·la la segona derivada?

Sempre hi ha un extrem relatiu si s'anul·la la segona derivada?

Això no és sempre cert. Mireu aquest exemple

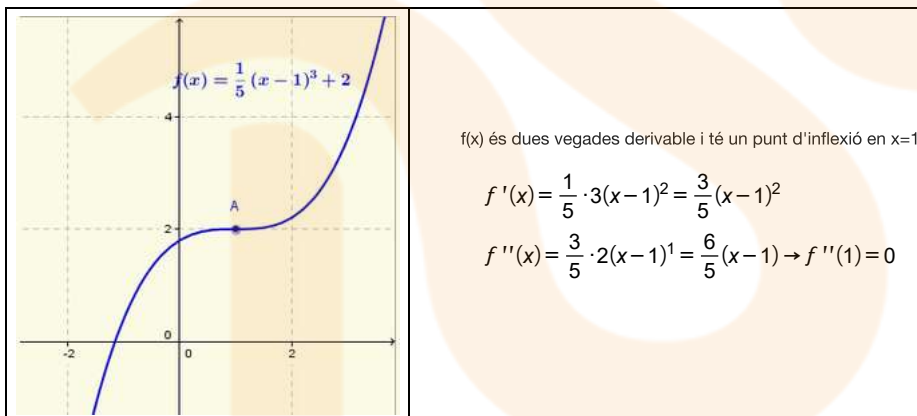


El que sí que és cert és que si en un punt hi ha un punt d'inflexió i la funció és derivable dos cops en aquest punt, llavors la derivada segona en aquest punt dóna 0

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ té un punt d'inflexió en } x = a \\ f(x) \text{ és dues vegades derivable en } x = a \end{array} \right\} \Rightarrow f''(a) = 0$$

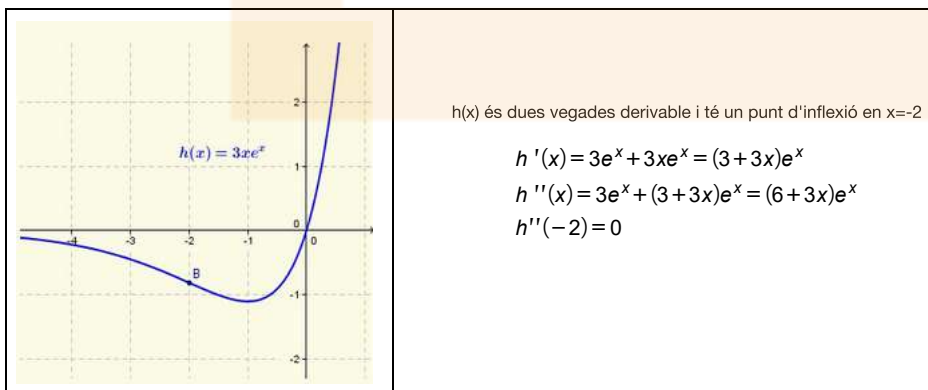
Exemple 1:

Segui la funció $f(x) = \frac{1}{5}(x-1)^3 + 2$.



Exemple 2:

Segui la funció $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.



Com trobar els intervals de curvatura d'una funció

Com trobar els intervals de curvatura d'una funció?

Per trobar els intervals de concavitat i convexitat d'una funció i els seus punts d'inflexió cal seguir els següents passos:

1. Trobar el domini de la funció $f(x)$. Els punts que no siguin del domini després els haurem de tenir en compte en el pas 4
2. Trobar la funció segona derivada $f''(x)$
3. Igualar la segona derivada a zero i resoldre aquesta equació. Amb aquest pas trobarem el valor de x dels possibles punts d'inflexió
4. Col·loquem damunt la recta real els valors trobats en les passes 1 i 3 (valors de x que no són del domini i possibles punts d'inflexió) de manera que la recta ens queda dividida en intervals.
5. Per a cada interval trobat cal comprovar si la funció és còncava o convexa. Per això sols cal agafar un valor de $x = x_0$ que estigui dins l'interval i substituir en la funció $f''(x)$:
 - Si $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ la funció és còncava en l'interval que conté x_0 (U)
 - Si $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ la funció és convexa en l'interval que conté x_0 (n)
6. En funció del pas anterior decidir si els punts trobats en el pas 3 són punts d'inflexió o no.
7. Els punts que no són del domini mai poden ser punts d'inflexió. Són punts de discontinuïtat

Exemple 1 :

Anem a trobar els intervals de creixement, decreixement i els extrems relatius de la funció $f(x) = \frac{x^3}{3x+3}$

1. $3x+3=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

2. Trobem la segona derivada

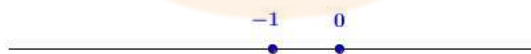
$$f'(x) = \frac{3x^2(3x+3) - x^3 \cdot 3}{(3x+3)^2} = \frac{9x^3 + 9x^2 - 3x^3}{(3x+3)^2} = \frac{6x^3 + 9x^2}{(3x+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(18x^2 + 18x)(3x+3)^2 - (6x^3 + 9x^2) \cdot 2(3x+3) \cdot 3}{(3x+3)^4} = \frac{(3x+3)[(18x^2 + 18x)(3x+3) - 6(6x^3 + 9x^2)]}{(3x+3)^4} =$$

$$\frac{(18x^2 + 18x)(3x+3) - 6(6x^3 + 9x^2)}{(3x+3)^3} = \frac{54x^3 + 54x^2 + 54x^2 + 54x - 36x^3 - 54x^2}{(3x+3)^3} = \frac{18x^3 + 54x^2 + 54x}{(3x+3)^3}$$

3. $\frac{18x^3 + 54x^2 + 54x}{(3x+3)^3} = 0 \rightarrow 18x^3 + 54x^2 + 54x = 0 \rightarrow 18x(x^2 + 3x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} 18x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \rightarrow \text{No hi ha solucions} \end{cases}$

4. Col·loquem damunt la recta real els valors $x_1 = 0$ i $x_2 = -1$



Obtenim doncs els intervals: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ i $(0, +\infty)$

5. Per a cada interval trobat agafem un valor de $x = x_0$ que estigui dins l'interval i substituïm en la funció $f''(x)$:

$$f'''(-2) = \frac{18(-2)^3 + 54(-2)^2 + 54(-2)}{(-6+3)^3} = \frac{-36}{-27} > 0$$

$$f''(2) = \frac{18 \cdot 2^3 + 54 \cdot 2^2 + 54 \cdot 2}{(6+3)^3} = \frac{468}{729} > 0$$

$$f'''(-0.5) = \frac{18(-0.5)^3 + 54(-0.5)^2 + 54(-0.5)}{(-1.5+3)^3} = \frac{-15.75}{3.375} < 0$$

$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
-----------------	----	-----------	---	----------------

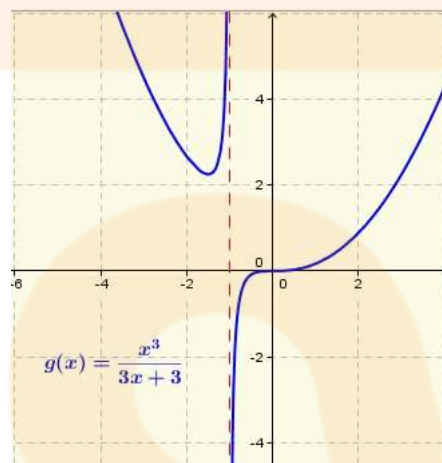
	PUNT DISC.		P. INFLEXIÓ	
$f''(-2) > 0$		$f'(-0.5) < 0$		$f'(2) > 0$

6. Els extrems relatius són:

Punt d'inflexió en $(0, f(0)) = (0, 0)$

7. En $x = -1$ hi ha una discontinuïtat

Comprovem el resultat amb la gràfica de la funció:



Estudi complet d'una funció

Exercici:

Busqueu els extrems relatius, els punts de tall amb els eixos i feu una representació gràfica aproximada de la funció: $f(x) = x^4 - x^2$

Resolució:

a) Dom $f(x)$ = Reals, ja que és una funció polinòmica

b) Extrems relatius. S'ha de resoldre l'equació: $f'(x) = 0$

$$f(x) = x^4 - x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,7 \end{cases}$$

Falta calcular la imatge de cada un dels punts així com esbrinar si corresponen a màxims o mínims o punts d'inflexió.

$$f(0) = 0^4 - 0^2 = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Els tres punts són :

$$(0,0)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Intervals on estudiar el creixement	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$	$x = 0$	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$
signe de f'	$f'(-1) =$ negatiu		$f'(-0,5) =$ positiu		$f'(0,5) =$ negatiu		$f'(1) =$ positiu
creixement de f	f decreix	mínim relatiu	f creix	màxim relatiu	f decreix	mínim relatiu	f creix

c) Punts de tall de la funció amb els eixos:

Cal resoldre els sistemes d'equacions següents:

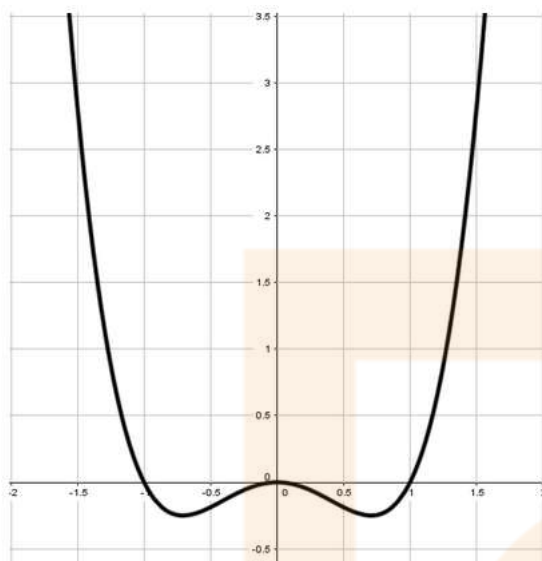
$$\begin{cases} y = x^4 - x^2 & \text{equació de la funció} \\ y = 0 & \text{equació de l'eix OX} \end{cases} \Rightarrow x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \quad i \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \text{solucions} \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Per tant els punts de tall amb l'eix OX són: $(0,0)$ $(-1,0)$ $(1,0)$

Podríem repetir el procés amb l'eix OY, però amb l'eix OY, només pot haver com a màxim 1 punt de tall i ja ens ha sortit en la part anterior, que és el punt $(0,0)$. Per tant no cal fer els punts de tall amb l'eix OY. En tot cas si es fa, sortirà com a únic punt el $(0,0)$

Amb totes aquestes dades la gràfica ens ha de sortir aquesta:



Estudi complet d'una funció

Exercici:

Trobeu el domini de la funció, els punts de tall amb els eixos, les asímptotes, els extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada de la funció: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Resolució:

a) **Dom $f(x)$ = Reals- $\{-1\}$** , ja que és $f(x)$ existeix i es pot calcular pels valors en que $x+1 \neq 0$.

Estudiem els valors en què la funció no existeix, són els valors que anul·len el denominador: $x+1=0 \rightarrow x=-1$. Aquest valor no té imatge, és a dir $f(-1)$ no existeix.

b) Punts de tall amb els eixos:

Cal resoldre els sistemes d'equacions següents:

Amb l'eix OX. Cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \text{no hi ha solució}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{0^2 + 2(0) + 2}{0 + 1} \Rightarrow y = \frac{2}{1} = 2$$

El punt de tall és únicament : (0,2)

c) Asímtotes

AH.

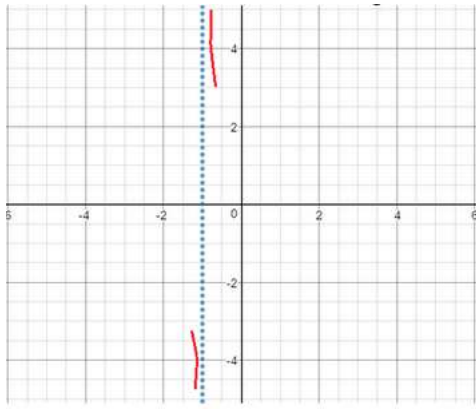
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \infty \text{ Cal observar que el grau del numerador és més gran que el del denominador. No hi ha A.H}$$

A.V.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{(-1)^2 + 2(-1) + 2}{(-1) + 1} = \frac{1 - 2 + 2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{(-1)^2 + 2(-1) + 2}{(-1) + 1} = \frac{1 - 2 + 2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

La recta $y=-1$ és una A.V.

Significa que la funció es comporta com en aquesta imatge:



A.O.

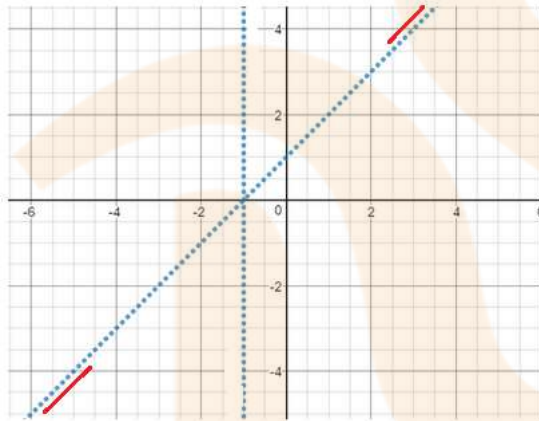
Les asímptotes obliques tenen aquesta equació: $y=mx+n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+2x+2}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+2}{x^2+x} = 1 \quad \text{dom grau numerador} = \text{grau denominador es divideix els coeficients de}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+2}{x+1} - 1x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+2}{x+1} - \frac{x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+2-x^2-x}{x+1} = 1 \quad \text{dom grau numerador} = \text{grau denominador es divideix els coeficients de}$$

Per tant l'asímtota obliqua és $y=x+1$

Significa que la funció es comporta com en aquesta imatge:



d) Extrems relatius. S'ha de resoldre l'equació: $f'(x) = 0$

$$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+2) \cdot (1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+2x+2-x^2-2x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$f' = 0$$

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Falta calcular la imatge de cada un dels punts així com esbrinar si corresponen a màxims o mínims.

$$f(0) = 2$$

$$f(-2) = -2$$

Els punts possibles màxims o mínims són :

$$(0,2)$$

$$(-2,-2)$$

Intervals on estudiar el creixement	$(-\infty, -2)$	$x = -2$	$(-2, 0)$	$x = 0$	$(0, 1)$	$x = 1$	$(1, \infty)$
signe de f'	$f'(-3) =$ positiu		$f'(-1) =$ negatiu		$f'(0.5) =$ negatiu		$f'(2) =$ positiu
creixement de f	f creix	màxim relatiu	decreix	mínim relatiu	f decreix	punt fóra del domini	f creix

Amb totes aquestes dades la gràfica ha de ser aquesta:

