

ENUNCIATS PROBLEMES PAU ÀLGEBRA (2005-2009)

1. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$. Calculeu el valor dels paràmetres a i b perquè

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. De tres nombres, x , y , z , sabem el següent: que el primer més el segon sumen 0; que el primer més el tercer sumen 1; que la suma de tots tres és 0 i, per acabar, que el primer multiplicat per un nombre k més el doble de la suma del segon i del tercer dóna 1.

- a) Què podeu dir del valor de k ?
b) Quant valen els tres nombres?

3. Considereu el sistema següent en funció del paràmetre real a :

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax + y = 3. \end{cases}$$

- a) Discussiu-lo en funció del paràmetre a .
b) Resoleu els casos compatibles.

4. La matriu següent expressa els preus unitaris, en euros, de quatre articles, A , B , C i D , procedents de les fàbriques f_1 , f_2 i f_3 :

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}.$$

Si una comanda és representada per un vector fila $C = (x \ y \ z \ t)$, què representa cadascun dels elements del resultat del producte $C \cdot P$? Si volem comprar 25 unitats de A , 30 de B , 60 de C i 75 de D , quina de les fàbriques ens ofereix el millor preu?

5. En un sistema hi ha, entre d'altres, aquestes dues equacions:

$$x + 2y - 3z = 5 \quad \text{i} \quad 2x + 4y - 6z = -2.$$

Què podeu dir de les solucions del sistema?

6. Esbrineu si el sistema següent pot ser compatible indeterminat per a algun valor del paràmetre m .

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x + 4y + 3z &= 0 \\ x + y + mz &= 0 \end{aligned} \right\}$$

És incompatible per a algun valor de m ?

7. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
b) Comproveu que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

8. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Determineu els valors de m per als quals $\text{rang}(A) < 3$. Pot ser $\text{rang}(A) = 1$ per a algun valor de m ?

9. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de p i q que fan que es verifiqui $A^2 = A$. En aquest cas, raoneu sense calcular què val A^{10} .

10. **Siguin** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu M , quadrada d'ordre 2, tal que $M \cdot A = B$.

b) Comproveu que $M^2 = I_2$ (matriu identitat d'ordre 2); deduiu l'expressió de M^n .

11. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x + y + (m-1)z = 1 \\ x + (m-1)y + z = m-1 \\ (m-1)x + y + z = m+2 \end{cases}$$

discutiu-lo en funció dels valors del paràmetre m .

12. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, on a i b són nombres reals.

a) Calculeu el valor de a i b per tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Segons els valors obtinguts en l'apartat anterior, calculeu A^3 i A^4 .

c) Si n és un nombre natural qualsevol, doneu l'expressió de A^n en funció de n .

13. **Considereu el sistema d'equacions**

$$\begin{cases} 2x + y - (a-1)z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ 4x - (a+1)y + z = -2a \end{cases}$$

a) **Discutiu-lo en funció del paràmetre a .**

b) **Resoleu-lo quan sigui compatible indeterminat.**

c) **En el cas (b), trobeu una solució del sistema en què x , y i z tinguin valors enters.**

14. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu A^2 i A^3 .

b) Determineu, raonadament, el valor de A^{60124} .

15. Considereu un sistema de dues equacions amb tres incògnites.

a) Pot ser incompatible?

b) Pot ser compatible determinat?

Raoneu les respostes.

16. **Siguin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.**

a) **Comproveu que la inversa de A és A^2 .**

b) **Comproveu també que $A^{518} = B$.**

17. En la resolució pel mètode de Gauss d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites ens hem trobat amb la matriu següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right)$$

- a) Expliqueu, raonadament, quin és el caràcter del sistema inicial.
b) Si és compatible, trobeu-ne la solució.

18. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors dels paràmetres a i b perquè tingui rang 1.

19. Donat el sistema $\begin{cases} x + py = p \\ px + y = p \end{cases}$:

- a) Discutiu-ne el caràcter en funció del paràmetre p .
b) Resoleu-lo quan $p = 2$.

20. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$. Calculeu el valor dels paràmetres a i b perquè

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x + 5y + z + a = 0 \\ (a - 2)z + x + 2y - 1 = 0 \\ (a - 1)y + (1 - a)x + z + a + 2 = 0 \end{array} \right\}$$

- a) Expliqueu, raonadament, si es tracta d'un sistema lineal homogeni.
b) Construïu-ne la matriu de coeficients i la matriu ampliada.
c) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals el sistema no és compatible determinat, i estudeu el caràcter del sistema en cada un d'aquests casos.
d) Resoleu-lo solament quan el conjunt de les seves solucions és una recta de \mathbb{R}^3 .