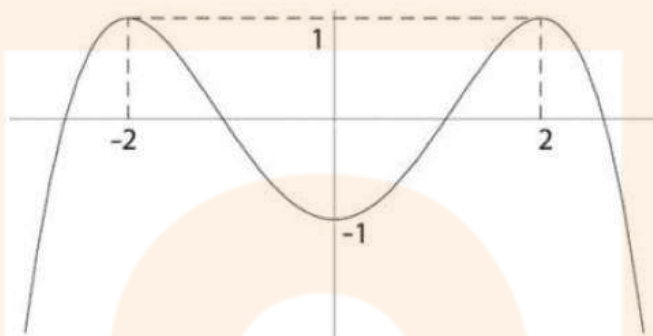


ENUNCIATS PROBLEMES PAU ANÀLISI I (2005-2009)

1. Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.
2. Sigui la paràbola $y = 2x^2 + x + 1$ i sigui A el punt de la paràbola d'abscissa 0.
 - a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt A .
 - b) En quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?
3. Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$.
4. Considereu la funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.
 - a) Calculeu c sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x = 0$ és horitzontal.
 - b) Per al valor de c trobat a l'apartat anterior, calculeu a i b sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -2$ i que talla l'eix OX quan $x = 1$.
 - c) Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.
5. Considereu la funció definida per $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x = 0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.
6. Donada la funció $f(x) = e^{-x^2 + 2x}$.
 - a) Trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos.
 - b) Trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius.
 - c) Trobeu les possibles asímptotes.
 - d) Feu la representació gràfica aproximada de la funció.
7. Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = e^x(ax + b)$, on a i b són nombres reals.
 - a) Calculeu els valors de a i b per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(3, e^3)$.
 - b) Per als valors de a i b obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.

8. Calculeu els valors del paràmetre a , $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.
9. En quin punt la recta tangent a la funció $f(x) = x \cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.
10. Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval $(-3, 3)$ és la següent:



- a) Determineu les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.
- b) Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval $(-3, 3)$.
- c) Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.
- d) Sabent que la funció és de la forma $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, trobeu de quina funció es tracta.
11. Trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

12. Digueu per a quin valor de x la recta tangent a la corba $y = \ln(x^2 + 1)$ és paral·lela a la recta $y = x$. Escriviu l'equació d'aquesta tangent.
13. Considereu la funció $f(x) = ax^2 + x + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Trobeu els valors de a i b que fan que la recta $y = 2x + 1$ sigui tangent a la gràfica de f quan $x = 1$.

14. Donades les funcions $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ i $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$:

- a) Comproveu que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.
- b) Comproveu també que $f'(x) = g(x)$ i $g'(x) = f(x)$.
- c) Comproveu que $f(x + y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$.
- d) Calculeu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dividint per e^x el numerador i el denominador; amb un procediment similar (però no igual), trobeu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

15. Sigui $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$. Donades les rectes $r_1: y = x + 2$ i $r_2: y = 7x - 2$:
- a) Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes pot ser tangent a la corba $y = f(x)$ en algun punt.
 - b) En cas que alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.
16. Considereu la funció real de variable real $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$.
- a) Trobeu-ne el domini.
 - b) Calculeu l'equació de les seves asíptotes, si en té.
 - c) Estudieu-ne els intervals de creixement i de decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, i classifiqueu-los.