RESOLUCIÓ PROBLEMES PAU ANÀLISI II (2005-2009)

1. Donada la funció $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

a) Calculeu la integral $\int f(x)dx$.

b) Trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1) = 1$.

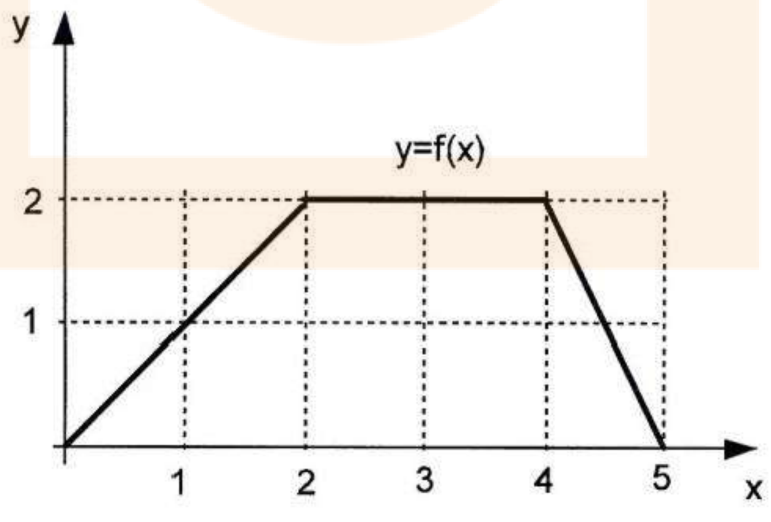
2. La recta tangent a la paràbola $y = 3 - x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant ($x > 0$, $y > 0$), talla l'eix OX en el punt A i l'eix OY en el punt B.

a) Feu un gràfic dels elements del problema.
b) Trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui l'àrea mínima.

3. Considereu la funció $f(x) = 4x - x^2$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de f en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 4$.
b) Feu un gràfic dels elements del problema.
c) Calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de f i les rectes tangents que heu trobat a l'apartat a).

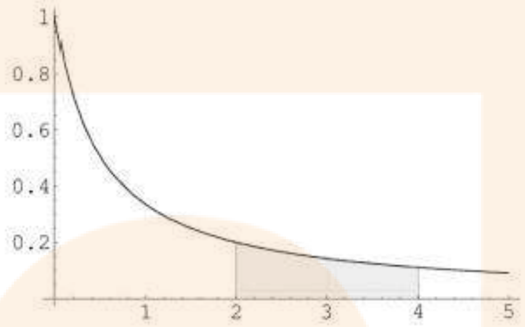
4. Considereu la funció $y = f(x)$ definida per a $x \in [0,5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



a) Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix?

b) Calculeu $\int_0^3 f(x)\,dx$.

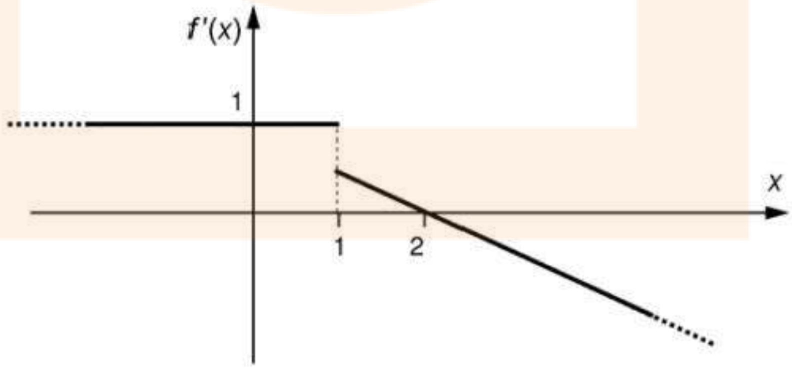
5. El gràfic de la funció $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, quan $x > 0$, és com segueix:



a) Trobeu una primitiva de la funció f.
b) Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

6. Considereu la paràbola d'equació $y = x^2 + 2x - 3$.
a) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 1$.
b) Calculant el mínim de la funció $y = x^2 + 2x - 3$, trobeu el vèrtex de la paràbola.
c) Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.
d) Calculeu l'àrea compresa entre la paràbola i les rectes tangents.

7. La funció derivada $f'(x)$ de certa funció contínua $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.

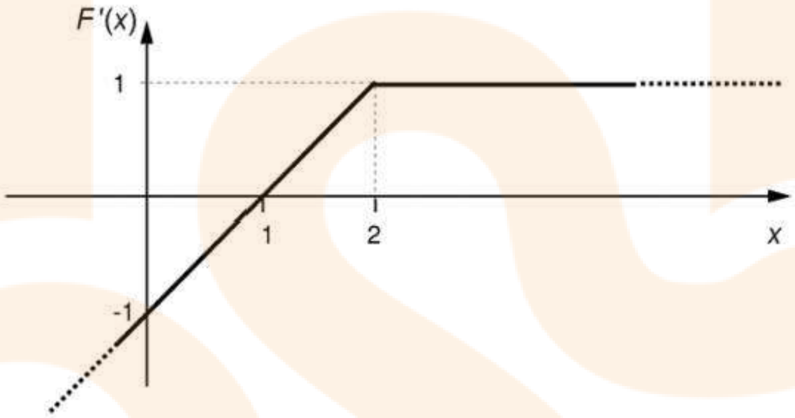


a) Digueu si $f(x)$ és derivable en tots els punts de **R** i per què.
b) Estudieu el creixement i el decreixement de $f(x)$.
c) Trobeu si $f(x)$ té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor de x i de quin tipus.
d) Sabent que $f(0) = 1$, calculeu el valor de $f(1)$.
Justifiqueu totes les respostes.

8. Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.

9. Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.

10. La funció derivada $F'(x)$ d'una funció contínua F: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que passa per l'origen és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



Escriviu l'expressió de la funció $F(x)$ com una funció a trossos.

11. Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4$ i $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + b$:

a) Calculeu a i b de manera que les gràfiques de $f(x)$ i de $g(x)$ siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
b) Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada en l'apartat anterior.
c) Pel valor de a obtingut en el primer apartat, calculeu el valor de l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses OX i la funció $f(x)$.

12. ***Se sap que certa funció derivable*** $F(x)$ ***verifica les condicions*** $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ***i*** $F(1) = 3$.

a) Trobeu $F(x)$.

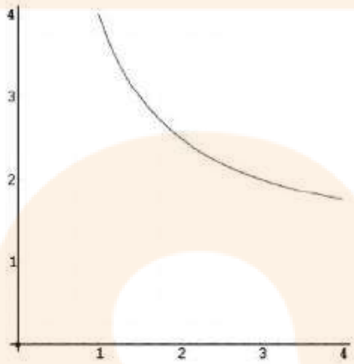
b) Calculeu l'àrea compresa entre $F(x)$ ***i l'eix OX des de*** $x = 0$ ***fins a*** $x = 1$.

13. De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim.

14. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{x(a-x)}{a^3}$, amb $a > 0$.

a) Trobeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX.
b) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre a.

15. La gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{3+x}{x}$, des de $x = 1$ fins a $x = 4$, és la següent:



a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$.
b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.
c) Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.
d) Calculeu la superfície del recinte damunt dit.

16. Considereu les corbes $y = 4x - x^2$ i $y = x^2 - 6$.
a) Trobeu-ne els punts d'intersecció.
b) Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.
c) Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.

17. Sigui la funció $f(x) = a + \dfrac{4}{x} + \dfrac{b}{x^2}$.

a) Calculeu els valors de a i b, sabent que la recta $2x + 3y = 14$ és tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

Per a la resta d'apartats, considereu que $a = -3$ i que $b = 4$.
b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x)$. Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.
c) Calculeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX.
d) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix OX i les rectes $x = 1$ i $x = 3$.