TEMA 3
INTERFERÈNCIA D'ONES

Introducció.

En aquest tema es pretén estudiar un dels fenòmens que es produeix quan dues ones es propaguen per una zona comuna de l'espai. Aquest fenomen és la **interferència.**

Abans però d'introduir-nos en aquest tema comentarem dos principis bàsics per poder desenvolupar aquests temes i posteriors.

Amb l'ajut d'aquests dos principis intentarem entendre alguns dels fenòmens ondulatoris més espectaculars i característics.

3.1. Principi de superposició d'ones.

Segons aquest principi, dues ones independents quan coincideixen en un mateix punt de l'espai es superposen i continuen el seu camí tal i com ho feien anteriorment.

3.2. Principi de Huygens.

Tots els punts del front d'ona es comporten com a focus emissors puntuals d'ones secundàries de freqüència igual a la primària de manera que l'embolcall de les ones secundàries determina per a un mateix instant de temps el nou front d'ona avançat de l'ona primària.

Aquestes ones secundàries són ones intuïtives que només es poden observar en certs fenòmens i que no poden propagar-se en direcció oposada a la de l'ona primària.

3.3. Interferències.

En aquest apartat considerarem la interferència d'ones harmòniques.

- **Interferència de dues ones harmòniques iguals amb diferència de fase δ.**

Considereu dues ones harmòniques d'iguals amplitud i freqüència, i que es propaguen a través del mateix medi. Les seves funcions d'ona són:

$$\Psi_1(x,t) = A \cdot \cos\ (\omega t - kx)$$

$$\Psi_2(x,t) = A \cdot \cos\ (\omega t - kx + \delta)$$

L'única diferència entre elles és la diferència de fase δ. La interferència de les dues ones serà la suma de les dues funcions d'ona.

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$
$$\Psi(x,t) = A \cdot \cos\ (\omega t - kx) + A \cdot \cos\ (\omega t - kx + \delta)$$
$$\Psi(x,t) = A\ \left(\cos\ (\omega t - kx) + \cos\ (\omega t - kx + \delta)\right)$$

Usant la relació trigonomètrica següent:

$$\cos\ \alpha\ +\ \cos\ \beta = 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

i desenvolupant l'equació de la interferència obtenim:

$$\Psi(x,t) = 2\cdot A\cdot\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\cdot\ \cos\left(\omega t - kx + \frac{\delta}{2}\right)$$

Veiem que l'ona resultant és una nova ona amb una freqüència idèntica a les dues primeres però amb una amplitud que depèn de la diferència de fase δ.

$$\Psi(x,t) = A'\cdot\cos\left(\omega t - kx + \frac{\delta}{2}\right)$$

on A' és :

$$A' = 2\cdot A\cdot\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Observem la següent taula de valors:

$\delta = 0$	$\cos(\delta / 2) = 1$	$A' = 2\cdot A$	$\psi(x,t) = 2\cdot A\cos(\omega t-kx)$
$\delta = \pi$	$\cos(\delta / 2) = 0$	$A' = 0$	$\psi(x,t) = 0$
$\delta = 2\cdot\pi$	$\cos(\delta / 2) = -1$	$A' = -2\cdot A$	$\psi(x,t) = -2\cdot A\cos(\omega t-kx)$
$\delta = 3\cdot\pi$	$\cos(\delta / 2) = 0$	$A' = 0$	$\psi(x,t) = 0$

Veiem que quan δ **= 2m·π** on **m = 0, 1, 2, …** obtenim el màxim d'amplitud possible. Diem doncs que hi ha **INTERFERÈNCIA CONSTRUCTIVA**.
Quan δ **= (2m+1)·π** on **m = 0, 1, 2, …** veiem que l'amplitud s'anul·la. Diem doncs que hi ha **INTERFERÈNCIA DESTRUCTIVA.**

Exemple:

Dos altaveus de música emeten ones sonores de igual freqüència i amplituds iguals. Quina distància hauríem de separar els altaveus per tal que un observador alineat amb els altaveus no senti res de res?

- **Interferència de dues ones harmòniques amb freqüències semblants.**

Considereu dues ones d'igual amplitud emeses des del mateix punt. Les dues ones al propagar-se a través del mateix medi tindran iguals velocitats de propagació.

$$v = \lambda_1\cdot f_1 = \lambda_2\cdot f_2 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{2\cdot\pi}{\lambda_1};\ \ \omega_1 = 2\cdot\pi\cdot f_1 \\ k_2 = \dfrac{2\cdot\pi}{\lambda_2};\ \ \omega_2 = 2\cdot\pi\cdot f_2 \end{cases} \Rightarrow \left|\ \begin{matrix} \omega_1 \approx \omega_2 \\ \\ k_1 \approx k_2 \end{matrix}\right.$$

Les funcions d'ona són:

$$\Psi_1 = A\cdot\cos(\omega_1\cdot t - k_1\cdot x) \qquad \Psi_2 = A\cdot\cos(\omega_2\cdot t - k_2\cdot x)$$

Com que aquestes ones interferiran en tots els punts de l'espai, la interferència serà la suma de les dues funcions d'ona.

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

$$\Psi = A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t - k_{1 \cdot x}) + A \cdot \cos(\omega_2 \cdot t - k_2 \cdot x)$$

Usant la identitat trigonomètrica següent:

$$\cos\ \alpha\ +\ \cos\ \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

la funció d'ona de l'ona interferència quedarà:

$$\Psi = 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t - \frac{k_1 - k_2}{2} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t - \frac{k_1 + k_2}{2} \cdot x\right)$$

on si fem:

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\ ;\ k_{\text{mod}} = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

$$\omega_{prom} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\ ;\ k_{prom} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

La funció d'ona anterior ens quedarà:

$$\Psi = \underbrace{2 \cdot A \cdot \cos(\omega_{\text{mod}} \cdot t - k_{\text{mod}} \cdot x)}_{\text{Amplitud}} \cos(\omega_{prom} \cdot t - k_{prom} \cdot x)$$

L'ona interferència és també una ona harmònica amb una freqüència angular mitjana entre ω_1 i ω_2. L'amplitud però està modulada és a dir, que depèn del temps i de la posició.

$$A' = 2 \cdot A \cdot \cos(\omega_{\text{mod}} \cdot t - k_{\text{mod}} \cdot x)$$

Podem definir en aquest cas dues velocitats, la velocitat de fase que és la velocitat a la que es propaga l'ona interferència i la velocitat de grup que és la velocitat a la que es propaga l'amplitud modulada.

$$v_{fase} = \frac{\omega_{prom}}{k_{prom}}\ ;\ v_{grup} = \frac{\omega_{\text{mod}}}{k_{\text{mod}}}$$

3.4.Ones estacionàries.

Fins ara hem estudiat les ones quan es propaguen sempre en un medi infinit, obert i sense límits. En la immensa majoria dels casos això no és real. Per exemple:

1. Una habitació tancada. Les ones sonores es propaguen i reboten a les parets.
2. Ones sísmiques. Es propaguen per l'interior de la Terra que té una grandària finita.
3. Una corda lligada a una paret . Si es fa oscil·lar es produeixen ones que reboten a la paret on hi ha l'extrem lligat.

En aquests casos es poden produir el que anomenem ones estacionàries. Les ones estacionàries són un cas particular d'interferència de dues ones que viatgen en sentits oposats.

- **Ones estacionàries en una corda amb els extrems lligats.**

Considereu una corda lligada pels dos extrems. Per l'extrem dret generarem una ona harmònica, la funció d'ona de la qual ve donada per:

$$\Psi_1(x,t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t + k\cdot x)$$

Quan l'ona arribi a l'altre extrem de la corda rebotarà enrera i com que el punt de rebot està lligat, es produirà una inversió del pols respecte el pols inicial[1]. L'ona rebotada tindrà associada la funció d'ona següent:

$$\Psi_2(x,t) = -A\cdot\cos(\omega\cdot t - k\cdot x)$$

Les dues ones interferiran en tots els punts de la corda i per tant es generarà l'ona interferència que serà la suma de les dues funcions d'ona anteriors

$$\Psi(x,t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t + k\cdot x) - A\cdot\cos(\omega\cdot t - k\cdot x)$$

Usant la identitat trigonomètrica següent:

$$\cos A - \cos B = 2\cdot sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Podem rescriure la funció de l'ona interferència com:

$$\Psi(x,t) = 2\cdot A\cdot sin(\omega\cdot t)\cdot sin(-k\cdot x)$$

Com que el $sin(-k\cdot x) = - sin(k\cdot x)$ i introduint el signe negatiu dins la fase ωt, la funció d'ona quedarà:

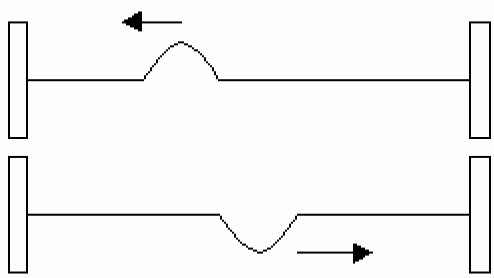
$$\Psi(x,t) = 2\cdot A\cdot sin(-\omega\cdot t)\cdot sin(k\cdot x)$$

A més, si $sin(-\omega t) = cos(\omega t + \pi/2)$ la funció de l'ona interferència queda de la següent forma:

$$\Psi(x,t) = 2\cdot A\cdot sin(k\cdot x)\cdot\cos\left(\omega\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Aquesta ona interferència vibra amb la mateixa freqüència que $\Psi_1(x,t)$ però amb una amplitud modulada que només depèn de la posició ($A' = 2\cdot A\cdot sin(kx)$).

[1] Quan un pols que viatge per una corda, rebota en un extrem lligat es produeix una inversió de la pertorbació respecte la del pols inicial.



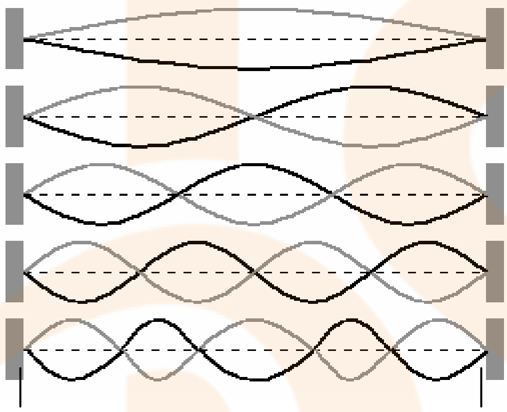
El que és interessant és veure per a quins valors de $\boldsymbol{x}$ s'anul·la l'amplitud $\boldsymbol{A'}$. Com que $k = (2\cdot\pi)/\lambda$, la condició anterior es pot rescriure com:

$$2\cdot A\cdot sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right) = 0 \Rightarrow sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\cdot\pi,\ \pm 3\cdot\pi,\ ...$$

És a dir que $\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = n\pi\ ;\ \forall n \in Z \Rightarrow x = \frac{n\cdot\lambda}{2}$. Hi ha punts de la corda que no vibren mai quan es formi una ona estacionària. Aquests punts s'anomenen *nodes*.

➢ <u>Modes de vibració d'una corda lligada pels extrems.</u>

No qualssevol freqüències de les ones generades en una corda de longitud **L** produiran ones estacionàries. Cal que la freqüència d'aquestes ones prengui uns valors concrets. Observem quins tipus d'ones estacionàries es poden obtenir en una corda lliga pels seus extrems.



ESTAT DE VIBRACIÓ	LONGITUD D'ONA	NOMBRE DE NODES	POSICIÓ DELS NODES	FREQÜÈNCIA $f_1 = \frac{v}{\lambda}$
✓ Mode fonamental de vibració.	$\lambda_1 = 2\cdot L$	n = 0, 1	$x_0 = 0$ $x_1 = L$	$f_1 = \frac{v}{2\cdot L}$
✓ Segon harmònic.	$\lambda_2 = L$	n = 0,1,2	$x_0 = 0$ $x_1 = \frac{L}{2}$ $x_2 = L$	$f_2 = \frac{v}{L} = 2\cdot f_1$
✓ Tercer harmònic.	$\lambda_3 = (2/3)\cdot L$	n = 0,1,2,3	$x_0 = 0$ $x_1 = \frac{L}{3}$ $x_2 = \frac{2}{3}L$ $x_3 = L$	$f_3 = 3\cdot\frac{v}{2\cdot L} = 3\cdot f_1$

✓ Quart harmònic.	$\lambda_2 = L / 2$	n = 0,1,2,3,4	$x_0 = 0$ $x_1 = \frac{L}{4}$ $x_2 = \frac{L}{2}$ $x_3 = \frac{3}{4}L$ $x_4 = L$	$f_4 = 2 \cdot \frac{v}{L} = 4 \cdot f_1$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

IMPORTANT: Les freqüències per a les que obtenim ones estacionàries són freqüències múltiples de la freqüència fonamental.

EXEMPLE

Tenim una corda de longitud L = 0,5 m i de massa m = 0,05 kg sotmesa a una tensió T = 100 N. Trobeu la velocitat de propagació de les ones, la freqüència fonamental de vibració i la del tercer harmònic.

- **Ones estacionàries en una corda amb un extrem lliure.**

Considereu una corda lligada per un extrem i amb l'altre extrem lliure. Per l'extrem lligat pertorbem la corda generant una ona l'equació de la qual és:

$$\Psi_1(x, y) = A \cdot \cos(\omega t + kx)$$

Aquesta ona en trobar un extrem lliure es reflectirà enrera però sense patir una inversió en l'amplitud com en el cas anterior. L'ona reflectida serà:

$$\Psi_2(x, y) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

Com que les dues ones viatgen simultàniament a través de la corda interferiran. L'equació de la interferència serà:

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t)$$
$$\Psi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t + kx) + A \cdot \cos(\omega t - kx)$$
$$\Psi(x,t) = A \cdot \left(\cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t - kx)\right)$$

Usant la relació trigonomètrica $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ l'equació de l'ona interferència quedarà:

$$\Psi(x,t) = 2A \cdot \cos(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

Aquesta ona interferència presenta la mateixa freqüència que la de les dues ones inicials però amb l'amplitud modulada $A' = 2A \cdot \cos(kx)$.

Podeu veure que l'amplitud només depèn de *x* i per tant podem observar que per alguns valors concrets de x aquesta s'anul·larà. Igual que en el cas anterior veiem que també es formaran *nodes*.

$$A' = 0 \Rightarrow 2A\cdot\cos(kx) = 0 \Rightarrow \cos(kx) = 0$$

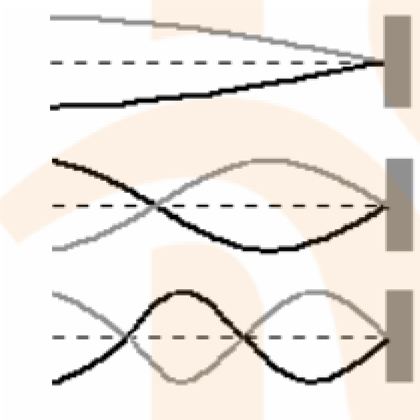
$$kx = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots \Rightarrow kx = \frac{2n+1}{2}\cdot\pi \;\; , n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

en ser $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, les solucions ens queden:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = \frac{2n+1}{2}\pi \Rightarrow \frac{2}{\lambda}\cdot x = \frac{2n+1}{2}$$

$$\boxed{x_n = \frac{2n+1}{4}\lambda}$$

Modes de vibració de la corda:



Mode fonamental de vibració o 1r harmònic.

3r harmònic.

5è harmònic.

He representat els tres primers harmònics però en poden haver molts més.
Pel mode fonamental λ_1=4L i n=0. Per tant els nodes i les freqüències dels harmònics superiors són:

$$x_n = \frac{2n+1}{4}\lambda_1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}\lambda_1 = L. \rightarrow \nu_1\cdot\lambda_1 = v \rightarrow \nu_1 = \frac{v}{4L}$$

Pel 3r harmònic, λ_3=4/3·L i n =0,1

$$x_n = \frac{2n+1}{4}\lambda_3 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{4}\lambda_3 = \frac{L}{3} \\ x_1 = \frac{3}{4}\lambda_3 = L \end{cases} \rightarrow \nu_3\cdot\lambda_3 = v \rightarrow \nu_3 = \frac{3v}{4L}$$

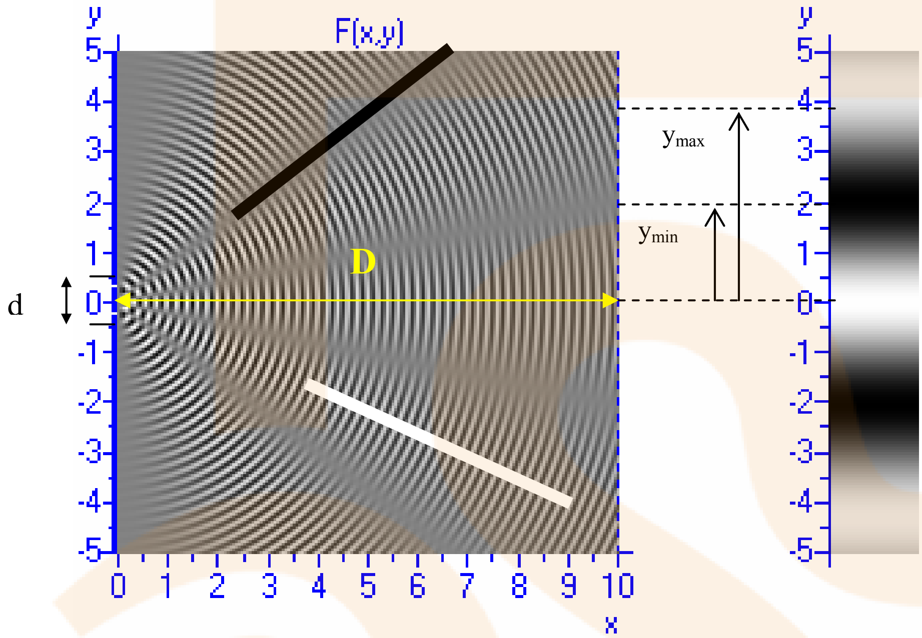
EXEMPLE

Tenim una corda de longitud L = 0,5 m i de massa m = 0,05 kg sotmesa a una tensió T = 100 N. La corda està lligada a un fil molt prim. Trobeu la velocitat de propagació de les ones, la freqüència fonamental de vibració i la del tercer harmònic.

3.5 Doble reixada de Young.

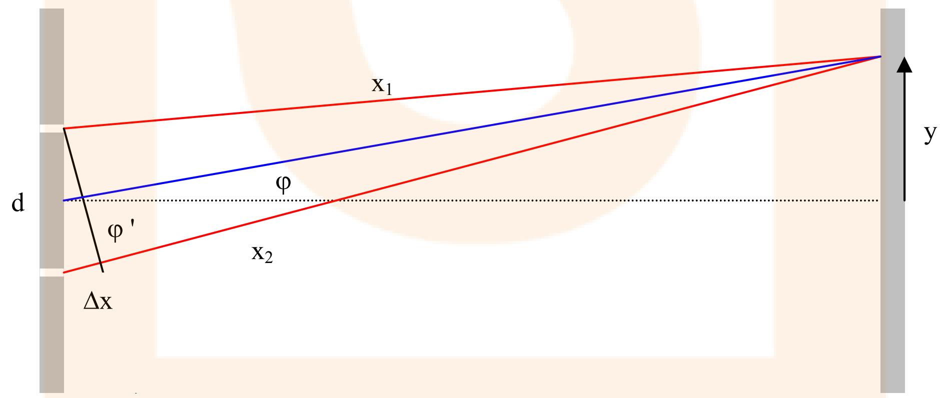
Demostració de la naturalesa ondulatòria de la llum (1901).

Considereu dos focus puntuals separats una distància **d**. Els dos focus estan situats a una distància D d'una paret vertical. Els dos focus emeten llum amb la mateixa freqüència i a més ho fan en fase. Amb aquestes dues condicions podem observar que sobre la paret es formaran línies molt il·luminades (màxims d'interferència) i zones fosques (mínims d'interferència). A la figura s'observa aquest fenomen. Les zones fosques corresponen a la interferència destructiva. Les zones més brillants a la interferència constructiva.



λ = 0,2 µm
d = 0,5 µm
D = 10 µm
y_{max} = 4 µm
y_{max} = 2 µm

Podem determinar la posició d'aquests màxims i mínims.



Com que **d<<D**, aleshores veiem que $\varphi \approx \varphi'$. A més veiem que $\varphi \approx \varphi' \rightarrow$ **0** i per tant **sin** $\varphi \approx \varphi$. Si ens fixem amb una sèrie de relacions trigonomètriques senzilles aplicades en els triangles del dibuix...

$$\left.\begin{array}{l} \sin\varphi' = \dfrac{\Delta x}{d} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{D} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\Delta x}{d} = \frac{y}{D} \rightarrow y = D\cdot\frac{\Delta x}{d}$$

Tinguem ara en compte els resultats obtinguts en el punt **3.3**. Es formaran zones fosques quan es compleixi la condició d'interferència destructiva ($\Delta x = \frac{2n+1}{2} \cdot \lambda$).

$$y = \frac{D}{d}\left(\frac{2n+1}{2}\lambda\right)$$

Es formaran zones il·luminades quan es compleixi la condició d'interferència constructiva. ($\Delta x = n \cdot \lambda$)

$$y = \frac{D}{d}(n \cdot \lambda)$$

Per a la figura anterior veiem que les equacions encaixen perfectament.

- Les franges de màxima brillantor estan a 0 μm i les segones a 4μm i a –4 μm.

$$y_{max} = \frac{D}{d}(n\lambda) = \begin{cases} n = +1 \Rightarrow y_{max} = \frac{D}{d}(+1 \cdot \lambda) = \frac{10}{0,5} \cdot 0,2 = 4\mu m \\ n = 0 \Rightarrow y_{max} = \frac{D}{d}(0 \cdot \lambda) = 0\mu m \\ n = -1 \Rightarrow y_{max} = \frac{D}{d}(-1 \cdot \lambda) = \frac{10}{0,5} \cdot (-0,2) = -4\mu m \end{cases}$$

- Les zones fosques estan a 2 μm i –2 μm.

$$y_{max} = \frac{D}{d}\left(\frac{2n+1}{2} \cdot \lambda\right) = \begin{cases} n = 0 \Rightarrow y_{max} = \frac{D}{d}\left(\frac{2 \cdot 0 + 1}{2} \cdot \lambda\right) = \frac{10}{0,5} \cdot 0,1 = 2\mu m \\ n = -1 \Rightarrow y_{max} = \frac{D}{d}\left(\frac{2 \cdot (-1) + 1}{2} \cdot \lambda\right) = \frac{10}{0,5} \cdot (-0,1) = -2\mu m \end{cases}$$