Mètode de Gauss - Jordan del càlcul de la inversa d'una matriu

Calculem la inversa de la matriu A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Partim de la matriu formada per la matriu A i la matriu identitat de ordre 3

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Farem que els elements de la primera columna $a_{21}=2$ i $a_{31}=3$ siguin zeros a partir de $a_{11}=2$:
Transformacions elementals a fer:

- Canviar la fila 2a pel resultat de restar la fila 2a menys la fila1a : $f_2 \to f_2 - f_1$. Observa que per aconseguir zero, com $a_{21}= a_{11}$, n'hi ha prou amb restar les files 2a i 1a.
- Canviar la fila 3a pel resultat de restar 2 vegades la fila 3a menys 3 vegades la fila1a : $f_3 \to 2f_3 - 3f_1$
  Observa que el que fem és : $f_3 \to a_{11}f_3 - a_{31}f_1$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{r} \\ f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to 2f_3 - 3f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Farem que els elements de la segona columna $a_{12}=-2$ i $a_{32}=2$ siguin zeros a partir de $a_{22}=3$:
Transformacions elementals:

- Canviar la fila 1a pel resultat de sumar 3 vegades la fila 1a més 2 vegades la fila 2a: $f_1 \to 3f_1 + 2f_2$
  Observa que el que fem és : $f_1 \to a_{22}f_1 - a_{12}f_2$
- Canviar la fila 3a pel resultat de restar 3 vegades la fila 3a menys 2 vegades la fila 2a : $f_3 \to 3f_3 - 2f_2$
  Observa que el que fem és : $f_3 \to a_{22}f_3 - a_{32}f_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{r} f_1 \to 3f_1 + 2f_2 \\ \\ f_3 \to 3f_3 - 2f_2 \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Farem que els elements de la tercera columna $a_{13}=2$ i $a_{23}= -2$ siguin zeros a partir de $a_{33}=-2$:
Transformacions elementals que hem de fer:

- Canviar la fila 1a pel resultat de sumar la fila 1a més la fila 3a: $f_1 \to f_1 + f_3$
- Canviar la fila 2a pel resultat de restar la fila 2a menys la fila 3a : $f_2 \to f_2 - f_3$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{r} f_1 \to f_1 + f_3 \\ f_2 \to f_2 - f_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Finalment farem que els elements de la diagonal siguin tots igual a 1:
Transformacions elementals que hem de fer:

- Canviar la fila 1a pel resultat de dividir la fila 1a per 6: $f_1 \to 1/6\ f_1$
- Canviar la fila 2a pel resultat de dividir la fila 2a per 3: $f_2 \to 1/3\ f_2$
- Canviar la fila 3a pel resultat de dividir la fila 3a per -2: $f_1 \to -1/2\ f_3$

$$\begin{pmatrix} \boxed{6} & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{r} f_1 \to \frac{1}{6} f_1 \\ f_2 \to \frac{1}{3} f_2 \\ f_3 \to \frac{-1}{2} f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Per tant la matriu inversa de A és $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Ara justificarem aquest mètode

Calcular la inversa de la matriu A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ és trobar una matriu B= $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ que

cumpleix **A·B=I**, o sigui $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si fem el producte d'aquestes dues matrius tindrem els tres sistemes d'equacions següents:

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+x_2=0 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y_1-2y_2+2y_3=0 \\ 2y_1+y_2=1 \\ 3y_1-2y_2+2y_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2z_1-2z_2+2z_3=0 \\ 2z_1+z_2=0 \\ 3z_1-2z_2+2z_3=1 \end{cases}$$

Fixeu-vos que els coeficients de les incògnites en tots tres sistemes són els mateixos i se diferencien en els termes independents

Quan utilitzem el mètode de Gaus-Jordan per resoldre aquests sistemes les operacions amb les tres primeres columnes són las mateixes en tots tres sistemes i, per tant, no hem de repetir-les. Fixeu-vos en les operacions amb els termes independents de cada sistema:

Per al **primer** sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to 2f_3 - 3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \to 3f_1 + 2f_2 \\ \\ f_3 \to 3f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \text{....etc.}$$

Per al **segon** sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to 2f_3 - 3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \to 3f_1 + 2f_2 \\ \\ f_3 \to 3f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{... etc.}$$

Per al **tercer** sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to 2f_3 - 3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \to 3f_1 + 2f_2 \\ \\ f_3 \to 3f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{... etc.}$$

Per tant, ja que fem les mateixes operacions, resulta més adient resoldre tots tres sistemes a la vegada. És per això que col·loquem a la dreta de la matriu A la matriu identitat (termes independents, per columnes, dels tres sistemes):

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{...etc}$$

Tema de matrius:

Trobeu la matriu inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Una vegada que hem fet que els elements de la primera columna a_{21} i a_{31} siguin zeros i hem obtingut la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, podem continuar les transformacions elementals treballant amb números enters (sense recórrer a les fraccions).

Farem que els elements de la segona columna a_{12} i a_{32} siguin zeros a partir de a_{22}:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \to 3f_1 + f_2 \\ \\ f_3 \to 3f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Farem que els elements de la tercera columna a_{13} i a_{23} siguin zeros a partir de a_{33}:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & 3 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \to f_1 + 2f_3 \\ f_2 \to f_2 + f_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Finalment farem que els elements de la diagonal siguin tots igual a 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \to \frac{1}{3}f_1 \\ f_2 \to \frac{1}{3}f_2 \\ f_3 \to \frac{-1}{6}f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Per tant la matriu inversa de A és $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Calculeu la inversa de la matriu A= $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Partim de la matriu formada per la matriu A seguit de la matriu identitat de ordre 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Farem que els elements de la primera columna a_{21} i a_{31} siguin zeros a partir de a_{11}:

$$\begin{pmatrix} \boxed{7} & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ f_2 \to 7f_2 - 2f_1 \\ f_3 \to 2f_3 + 3f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -4 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & -20 & 20 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Per aconseguir-ho hem substituït:

- la fila 2a pel resultat de sumar la fila segona per $a_{11}= 7$ menys la primera per $a_{21} =2$, o sigui: $f_2 \to 7f_2 - 2f_1$
- la fila 3a pel resultat de sumar la fila tercera per $a_{11}= 7$ menys la primera per $a_{31}= - 3$, o sigui: $f_3 \to 2f_3 + 3f_1$

En la matriu resultat farem que els elements de la segona columna $a_{12} = -2$ i $a_{32} = -20$ siguin zeros a partir de $a_{22} =11$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{11} & -4 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & -20 & 20 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} f_1 \to 11f_1 + 2f_2 \\ \\ f_3 \to 11f_3 + 20f_2 \end{array} \begin{pmatrix} 77 & 0 & 14 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & 11 & -4 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & -7 & 140 & 77 \end{pmatrix}$$

Per aconseguir-ho hem substituït:

- la fila 1a pel resultat de sumar la fila primera per $a_{22} =11$ menys la segona per $a_{12} = -2$ o sigui: $f_1 \to 11f_1 + 2f_2$

- la fila 3a pel resultat de sumar la fila tercera per $a_{22} =11$ menys la segona per $a_{32} = -20$, o sigui: $f_3 \to 11f_3 + 20f_2$

En la matriu resultat farem que els elements de la tercera columna $a_{23} = -4$ i $a_{13} = 14$ siguin zeros a partir de $a_{32} =140$

$$\begin{pmatrix} 77 & 0 & 14 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & 11 & -4 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & -7 & 140 & 77 \end{pmatrix} \begin{array}{l} f_1 \to 10f_1 - f_3 \\ f_2 \to 35f_2 + f_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 770 & 0 & 0 & 77 & 0 & -77 \\ 0 & 385 & 0 & -77 & 385 & 77 \\ 0 & 0 & 140 & -7 & 140 & 77 \end{pmatrix}$$

Per aconseguir-ho hem substituït:

- la fila 1a pel resultat de sumar la fila primera per 10 menys la tercera (ja que $a_{32} =140$ és igual a 10· a_{13} que val 14), o sigui: $f_1 \to 10f_1 - f_3$
- la fila 2a pel resultat de sumar la fila segona per 35 més la tercera (ja que $a_{32} =140$ és igual a - 35· a_{23} que val -4), o sigui: $f_2 \to 35f_2 + f_3$

Ara falta dividir: la fila 1a per 770, la fila 2a per 385 i la fila 3a per 140

$$\begin{array}{l} f_1 \to \frac{1}{770} f_1 \\ f_2 \to \frac{1}{385} f_2 \\ f_3 \to \frac{1}{140} f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{10} & 1 & \frac{2}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} & 1 & \frac{11}{20} \end{array}\right)$$

I la matriu inversa és : $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & 1 & \frac{2}{10} \\ -\frac{1}{20} & 1 & \frac{11}{20} \end{pmatrix}$

Podem comprovar aquest resultat:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & 1 & \frac{2}{10} \\ -\frac{1}{20} & 1 & \frac{11}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determineu, segons els valors de m, el rang de les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-m & 0 & 2+m \\ 0 & 0 & m^2-4 & 2-m \end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & m & 2 \\ m & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Rang d'A:

La matriu A està esglaonada i per tant, per calcular el seu rang hem de contar les files no nul·les que en té.
Els elements a_{22} i a_{33} depenen d'm i per tant hem d'esbrinar per quins valors d'm aquests són diferents de zero

$$\begin{cases} a_{22} = 2-m = 0 \Rightarrow m = 2 \\ a_{33} = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2 \end{cases}$$

Tenim tres casos:

- Si m≠ 2 i m ≠ -2 el rang de A és 3 (tres files no nul·les)
- Si m=2 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-m & 0 & 2+m \\ 0 & 0 & m^2-4 & 2-m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$el rang d'A és 2
- Si m=-2 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-m & 0 & 2+m \\ 0 & 0 & m^2-4 & 2-m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ el rang d'A és 3

Rang d'B (mitjançant Gauss):

Per calcular el rang de la matriu B hem d'esglaonar-la (mètode de Gauss)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & m & 2 \\ m & 0 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to f_3 - mf_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & -2m & 1-m^2 & -2m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ f_3 \to f_3 - 2mf_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vegada la matriu B està esglaonada hem de contar les files no nul·les que en té.

L'element a_{33} depenen d'm i per tant hem d'esbrinar per quins valors d'm aquest és diferent de zero

$a_{33} = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$

Tenim tres casos:

- Si m≠ 1 i m ≠ -1 el rang de B és 3 (tres files no nul·les)
- Si m=1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ⇒el rang d'B és 2
- Si m=-1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ⇒ el rang d'B és 2

Rang d'B (mitjançant determinants):

En B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & m & 2 \\ m & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$ tenim l'element a_{11}=1≠0 i per tant rang (B) ≥ 1

Orlem aquest element amb la fila 2a i columna 2a. El menor que resulta $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$=-1 i per tant rang (B) ≥ 2

Podem orlar aquest menor de dues formes:

- Amb la fila 3a i columna 3a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m^2 - m^2 - 2 = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$
  - Si m≠ 1 i m ≠ -1 el rang de B és 3 (determinant no nul)
- Amb la fila 3a i columna 4a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 0 & m \end{vmatrix} = m + 4m - 3m - 2m = 0$ per qualsevol valor d'm

Per tant

Si m≠ 1 i m ≠ -1 el rang de B és 3 i

Si m=1 o m=-1 el rang de B és 2