

Física en context

Batxillerat 2n curs





Equip d'elaboració d'aquesta versió de la unitat

Octavi Casellas
Montserrat Enrech
José Javier González
Luisa Herreras
Josep Olivella
Octavi Plana
Jaume Pont

Aquesta unitat és una revisió/ampliació/modificació d'edicions anteriors en les que han col·laborat altres persones

Centre de Documentació i Experimentació en Ciències

Departament d'Educació

Barcelona 2021



UNITAT 7. PLANETES I ESTRELLES

Índex

Per què una unitat anomenada “Planetes i estrelles”?	1
1 De Ptolemeu a Kepler	3
1.1 Models de l'univers.....	3
2 Astres en moviment	9
2.1 La llei de gravitació universal.....	9
2.2 Camp i força	12
3 Viatjar fora del nostre planeta	25
3.1 Llançar pedres enlaire, satèl·lits i naus espacials	26
3.2 Satèl·lits en òrbita tancada	28
4 Últim recorregut	35
4.1 Objectius	36
4.2 Activitats i qüestions finals	37



Per què una unitat anomenada “Planetes i estrelles”?

Si mai heu tingut l'oportunitat de mirar el cel en una nit estrellada haureu pogut veure un espectacle realment grandíós. Milers d'estrelles, tantes que costa d'imaginar, algun planeta, la Lluna. Mirant cara a cara la volta de la nit, els humans, petits, en un planeta petit, d'un sistema solar entre tants, som ben poca cosa, gairebé res en un univers de milers de milions d'anys.

Mirant el cel, els primers humans ja es van preguntar què movia la Lluna i el Sol, de què estaven fetes les estrelles, què hi havia més enllà i com havia començat tot. Durant milers d'anys, l'observació, a ull nu, d'aquest espectacle meravellós era tot el que es tenia per a intentar respondre aquestes qüestions. L'observació pacient dels astrònoms de l'antiguitat anotant els canvis en la posició dels planetes i estudiant el seu moviment, juntament amb mites, religions i llegendes, mostren els esforços de la humanitat per a comprendre l'univers. La invenció del telescopi va ser un gran avenç tecnològic. La revolució científica del segle XVII amb els descobriments astronòmics de Galileu, les mesures realitzades per Tycho Brahe del Sol, la Lluna i els planetes, i els models geomètrics de Kepler va culminar en la llei de la gravitació universal de Newton. L'escala del sistema solar es podia estimar, les dimensions i les masses dels planetes també i el moviment dels astres es féu previsible.

Durant anys els avenços en astronomia foren escassos. A més de les estrelles i els planetes es van descobrir les nebuloses. A meitats del segle XIX amb la invenció de la fotografia es va demostrar que algunes eren de forma espiral, d'altres el·líptiques i d'altres totalment irregulars. Fins als anys 20 del segle XX no es va identificar la galàxia més propera, Andròmeda (fora de la nostra pròpia galàxia). En aquesta recerca s'han descobert moltes estrelles i el Sol, avui en dia, sabem que és una estrella ordinària en un dels braços de la Via Làctia.

I d'aquesta manera, petits com som, els humans hem emprès l'aventura de comprendre més i més aquest univers extraordinari on ens ha tocat viure. Potser estem sols a l'espai o potser algun dia coneixerem altres éssers en algun planeta llunyà que també vulguin saber el com i el perquè del món. La física ha contribuït a entendre tant el que és tan petit que no es pot veure com el que és tan gran que no es pot abastar. Les respostes que s'han obtingut per ara donen una visió molt diferent de la que hi havia fa només uns 100 anys, i les investigacions que ara hi ha en marxa, o les que s'endegaran en un futur pròxim, contribuiran amb seguretat a que les persones del demà coneguin millor l'univers.

Com en qualsevol activitat científica, la recerca no només condueix a nous coneixements (ciència bàsica). Pel camí s'han de desenvolupar noves tecnologies que, sovint, permeten millorar la nostra qualitat de vida. Els nous coneixements i les noves tecnologies inspiren noves investigacions i aplicacions.

Si teniu l'oportunitat de mirar el cel i veure les estrelles aquesta nit, penseu en tots els que ho han fet abans que vosaltres, en el que imaginaven i en el que encara queda per a descobrir. L'espectacle de veure el cel és magnífic quan es fa a través de telescopis, que permeten fotografiar objectes de lluminositat molt baixa, invisibles als nostres ulls. A la Figura 1 alguns dels “punts” de la fotografia són galàxies, que contenen milers de milions d'estrelles.

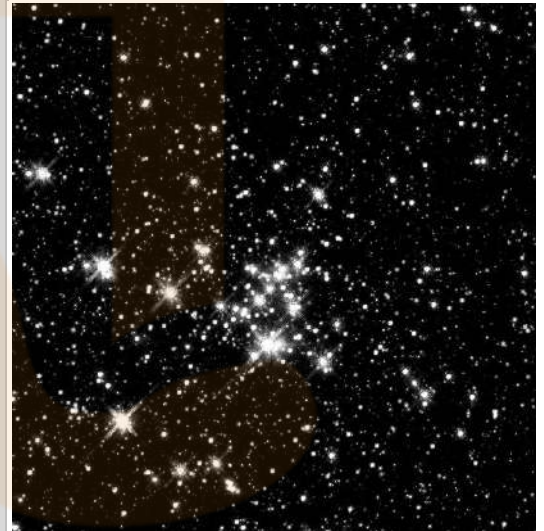


Figura 1. Una petita zona del cel fotografiada amb un telescopi (font NASA)

Introducció dels principis i dels procediments físics

En aquesta unitat començareu fent un breu repàs a la història de l'astronomia: des del model geocèntric de Ptolemeu al model heliocèntric que Copèrnic introduí l'any 1543, les observacions i descobriments de Galileu, les lleis que Kepler deduí amb les dades experimentals de Brahe, per arribar, finalment, a la llei de la gravitació universal de Newton.

S'introduirà el concepte de camp i s'estudiarà el camp gravitatori creat per una massa. Les línies de força permetran representar el camp per a visualitzar la intensitat del camp gravitatori en funció de la distància. S'estudiarà el camp gravitatori terrestre. Les condicions per a viatjar fora del planeta, amb el llançament de sondes i naus espacials ens portarà a trobar la velocitat d'escapament de la Terra. Actualment la tecnologia dels satèl·lits facilita la comunicació global en el planeta i l'estudi del propi planeta, entre d'altres. S'estudiaran les condicions per a posar satèl·lits en òrbita donat el potencial gravitatori que crea la Terra al seu voltant, així com els paràmetres característics d'aquest satèl·lits i les seves relacions.

1 De Ptolemeu a Kepler

La nit i el dia, el canvi de les estacions al llarg de l'any determinen el ritme de la vida a la Terra. Les primeres civilitzacions ja van dissenyar sistemes i van establir calendaris basats en aquests fenòmens naturals per a mesurar el pas del temps. Els eclipsis i els cometes, impredecibles llavors, eren vistos, en general, com a símbols de mals auguris i de canvis no sempre bons. Actualment aquests fenòmens són del tot predictibles i el seu coneixement, així com el del cel, ha canviat la idea que tenim de l'univers.

ACTIVITAT 1 El ritme del firmament

Diferents capítols del programa *Nostranau* mostren com les civilitzacions antigues ja es van preocupar per entendre el ritme amb que els astres es movien pel firmament.

"Els homes i les dones han contemplat el cel, intrigats, des de la Prehistòria. Esperaven trobar-hi respostes i, en particular, esperaven preveure els esdeveniments del firmament, ja que, pensaven, tenien relació amb els esdeveniments d'aquí la Terra".

www.nostranau.net/stonehenge

"L'astronomia xinesa és una de les més antigues del món. Va néixer al mateix temps que l'astronomia babilònica, fa uns 4 mil anys, i va assolir un nivell de coneixements similar al de l'astronomia occidental".

www.nostranau.net/astronomia-xinesa

"Al continent americà, molt abans del descobriment de Colom, el planeta més apreciat i reverenciat de tots era Venus".

www.nostranau.net/astronomia-maia

(Tots aquests vídeos es poden trobar a <http://www.nostranau.net/index>)

1.1 Models de l'univers

Qualsevol que miri el cel nocturn una estona prou llarga pot veure com les estrelles es mouen. Tota la volta celeste sembla girar alhora, per a quedar al cap d'un dia, aproximadament igual. En canvi la Terra, sota els nostres peus, sembla que resta sempre immòbil. Uns pocs astres particulars es mouen de manera diferent que la resta de les estrelles i de vegades les avancen i de vegades es queden enrere. Aquests astres se'ls va anomenar **planetes**, que significa "errants".

Els astrònoms antics imaginaven, amb molt de sentit comú, que la Terra immòbil era al centre de l'univers i que tots els cossos celestes giraven al seu voltant. Com que totes les estrelles es movien alhora, en el model se situaven totes enganxades a una esfera que girava al voltant de la Terra. La Lluna, el Sol, i els planetes, que "anaven a la seva", tenien cadascun la seva pròpia esfera, sempre transparent, que girava al voltant de la Terra, cadascuna al seu ritme. D'aquesta manera tots els cossos de l'univers giraven, amb moviment circular, al voltant de la Terra.

En millorar les observacions, es va anar veient que el model no era prou bo, i per exemple no explicava perquè de vegades els planetes avançaven

i de vegades retrocedien, i es van fer models més sofisticats. Al segle II, **Claudi Ptolemeu** d'Alexandria (Egipte) va publicar un tractat astronòmic que situava la Terra al centre de l'univers i el Sol, la Lluna i els planetes giraven al voltant. Les estrelles eren en l'esfera més externa. Els planetes considerava que es movien en cercles (epícles), els centres dels quals es movien al seu torn sobre uns altres cercles (deferents), al voltant de la Terra (Figura 2). El model encara tenia algunes complicacions addicionals, però permetia fer prediccions acurades de la posició de astres.

El model de Ptolemeu és un **model geocèntric** perquè situa la Terra al centre de l'univers. Encara que incorrecte, el model va ser acceptat durant 14 segles i va influir en el pensament astronòmic i científic fins ben entrat el segle XVI, fins l'arribada del model heliocèntric i la revolució científica.

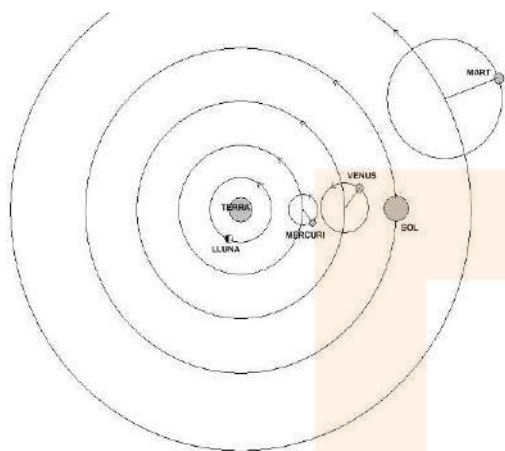


Figura 2. Els planetes amb els seus epícles i deferents, segons el model de Ptolemeu publicat al segle II

Les Taules Alfonsies

El tractat d'astronomia de Ptolemeu feia la millor descripció dels coneixements astronòmics dels grecs fins a l'època. L'obra va ser traduïda pels astrònoms àrabs amb el nom d'*Almagest* i gràcies a ells va ser coneguda a Occident

www.nostranau.net/alfons-x-el-savi

(Aquest vídeo també es pot trobar a <http://www.nostranau.net/index>)

A **Nicolau Copèrnic** (1473-1543), polonès, el sistema de Ptolemeu li semblava massa complicat. Creia que el món havia de poder descriure's d'una manera més senzilla i va proposar un model heliocèntric. El **model heliocèntric** situava el Sol al centre de l'univers i els planetes movent-se amb moviment aproximadament circular al seu voltant. La Terra passava de ser el centre de l'univers a ser considerada un planeta més entre d'altres. Això li permetia simplificar el model i s'estalviava algunes complicacions del sistema de Ptolemeu.

La publicació, l'any de la seva mort, de la seva obra "*Sobre la revolució de les esferes celestes*", va introduir la controvèrsia sobre el model de l'univers. El model de Copèrnic va topiar amb una gran dificultat: l'església havia adoptat el model de Ptolemeu, de manera que la posició de la Terra al centre de l'univers no es considerava una opinió científica, que podia discutir-se, sinó una veritat religiosa, de la qual no es podia ni dubtar sense exposar-se a càstigs severos. El llibre de Copèrnic es va incloure a la llista d'obres prohibides. Però, malgrat tot, les seves idees es van anar estenent.

Les posicions de les estrelles i dels planetes es van conèixer cada vegada amb més exactitud. Un dels astrònoms més acurats en les mesures va ser el danès **Tycho Brahe**. Entre 1576 i 1597 va recollir sistemàticament i amb la màxima precisió possible en aquella època un gran nombre de dades astronòmiques. Tycho Brahe havia elaborat un model de l'univers entre el de Ptolemeu i el de Copèrnic. Segons aquest model, la Terra estava al centre, la Lluna i el Sol giraven al seu voltant i els altres planetes (però no la Terra) giraven al voltant del Sol. Quan va morir Brahe, les

dades de les seves observacions van passar al seu ajudant **Johannes Kepler** (1571-1630).

ACTIVITAT 2 Johannes Kepler

La biografia de Kepler i el seu treball amb Tycho Brahe es pot trobar en el capítol "*La armonía de las esferas*" de la sèrie Cosmos de Carl Sagan.

<https://www.youtube.com/watch?v=Ziq68Ubl3yk>

1.1.1 Les lleis de Kepler

En l'època de Kepler la distinció entre ciència i creença no estava establerta clarament i el moviment dels astres, encara prou desconegut, estava governat per lleis divines. Kepler va intentar entendre les lleis del moviment planetari durant la major part de la seva vida. En un principi va considerar que el moviment dels planetes havia de complir les lleis pitagòriques de l'harmonia. Aquesta teoria és coneguda com la música o l'harmonia de les esferes celestes. Kepler estava convençut de les teories de Copèrnic, i va fer servir les dades de Tycho Brahe per corroborar-les. Però les dades no concordaven del tot amb la idea de les òrbites circulars, especialment en el cas de Mart. Kepler va descobrir, entre d'altres aspectes, que els planetes es movien en òrbites el·líptiques amb el Sol en un dels seus focus.

ACTIVITAT 3 Els satèl·lits de Júpiter



Mesureu els períodes i semieixos majors (radis) de les òrbites dels satèl·lits galileans de Júpiter amb el programari Celestia.

Devia quedar molt sorprès en descobrir que les òrbites eren el·líptiques, perquè ell, igual que tothom en el seu temps, considerava que els astres del cel i els seus moviments havien de ser perfectes i l'eclips era una figura que era considerada molt menys perfecta que no pas el cercle. Però les dades van pesar més que els prejudicis, i finalment Kepler va enunciar en el seu llibre "*Les harmonies del món*" les tres lleis que descriuen el moviment dels planetes (encara que les òrbites no eren cercles, com a mínim eren el·líptiques que seguien disciplinadament unes lleis precises).

- **Primera llei:** Tots els planetes es mouen en òrbites el·líptiques, amb el Sol en un dels focus.
- **Segona llei:** La línia que va del Sol a un planeta escombra àrees iguals en temps iguals.
- **Tercera llei:** El període de translació d'un planeta al quadrat és proporcional al semieix major de la seva òrbita al cub:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constant}$$

on T és el període de translació del planeta i a la longitud del semieix major de l'òrbita el·líptica.

Les lleis de Kepler tenien un caràcter purament empíric: recollien un bon grapat d'observacions astronòmiques, però no hi havia cap teoria científica a partir de les qual es poguessin demostrar.

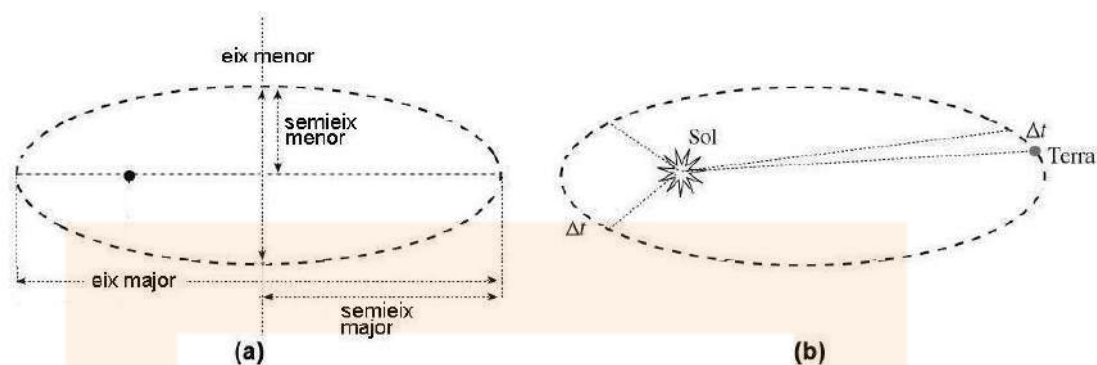


Figura 3. Òrbita el·líptica (a) elements de l'el·lipse: focus, semieix major i semieix menor. (b) Un objecte que es mou en una òrbita el·líptica escombra àrees iguals en intervals de temps iguals

La dinàmica del sistema solar

El següent vídeo us parla de com les tres lleis de Newton donen compte de les òrbites dels planetes del sistema solar.

http://sse.jpl.nasa.gov/multimedia/video-view.cfm?Vid_ID=303

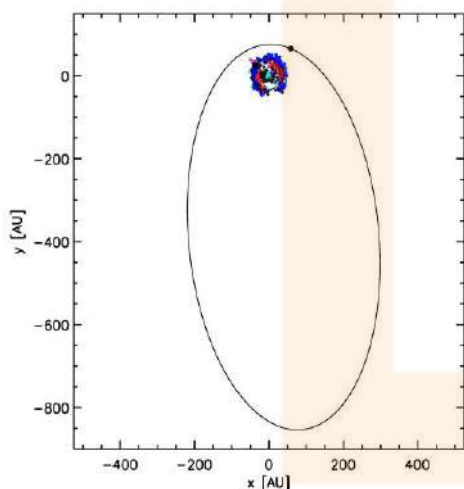


Figura 4. Posició actual i òrbita de Sedna. En la zona acolorida es troba el Sol i tots els planetes del sistema solar

Qüestions

- 1 Actualment les lleis de Kepler no s'apliquen només als planetes, sinó també a qualsevol astre que giri al voltant d'un altre més gran, per exemple els satèl·lits artificials al voltant de la Terra. Reescriu les lleis de Kepler, tal com s'aplicarien a un satèl·lit artificial al voltant de la Terra en una òrbita el·líptica.
- 2 Els cometes descriuen òrbites molt allargades al voltant del Sol. En quina part de la seva òrbita la seva velocitat és major? Justifiqueu la resposta en base a les lleis de Kepler.
- 3 El març del 2004 es va descobrir un nou objecte del sistema solar, el més llunyà per ara, per al qual s'ha proposat el nom de Sedna, una deessa esquimal de l'oceà. La Figura 4 mostra l'òrbita de Sedna i la seva posició. Les distàncies que apareixen a la imatge estan indicades en unitats astronòmiques. Una unitat astronòmica (u. a., A.U. en anglès) és igual a la distància mitjana de la Terra al Sol, uns $150 \cdot 10^9$ m. Mesureu les distàncies que calguin i calculeu el temps que tarda Sedna en completar la seva òrbita. Utilitzeu el fet que la Terra tarda 1 any en completar la seva òrbita al voltant del Sol.

Solució: 9.500 anys aproximadament

ACTIVITAT 4 El Sistema Solar

La NASA posa al vostre abast una pàgina web que us permet explorar el Sistema Solar.

ACTIVITAT 5 La notació científica

La pàgina web de l'Activitat 4 us permet obtenir les dades de tots i cadascun dels planetes del nostre sistema solar. Al buscar informació sobre la terra (*Planets, Earth, Facts & Figures*) la NASA us dona les diferents dades utilitzant diferents notacions (mètrica, anglesa i científica).

Què és la notació científica? Com es treballa amb ella? Que són les xifres significatives i com es treballa amb elles? La següent plana web us pot ajudar en la vostra feina.

<https://experimentacioliure.wordpress.com/constants/xifres-significatives/>

Elaboreu un informe en què s'expliqui què és la notació científica i com es treballa amb ella. En l'informe cal parlar també de les xifres significatives.

Contemporani de Kepler fou **Galileu Galilei** (1564-1642), professor de la Universitat de Pàdua i defensor del model heliocèntric. Galileu va contribuir a la millora del telescopi, inventat a Holanda feia poc, i va realitzar importants observacions astronòmiques: les fases del planeta Venus, les taques solars i les llunes de Júpiter, entre d'altres. Les seves observacions estaven d'acord amb el model de Copèrnic i demostraven que el firmament no era perfecte.

ACTIVITAT 6 Satèl·lit en òrbita

Poseu un satèl·lit en òrbita al voltant de la Terra amb una simulació de l'*Interactive Physics* i determineu els eixos major i menor, posició del focus i la velocitat areolar del satèl·lit en diferents instants de temps.

Poc després de la mort de Galileu, neix **Isaac Newton** (1642-1727). Newton va ser el primer en demostrar que les lleis que regeixen el moviment en la Terra i les que regeixen el moviment dels astres en el firmament són les mateixes. És considerat el científic més gran de tots els temps i la seva obra culmina la revolució científica del segle XVII. Newton es recolzaria en els treballs de Kepler per a elaborar la teoria de la gravitació universal que estudiareu als apartats següents. A partir de la llei de la gravitació es poden deduir les tres lleis de Kepler.



2 Astres en moviment

Com influeixen els astres en el moviment d'altres cossos de l'univers? Com es poden determinar les característiques dels planetes i dels estels, per exemple, a partir de l'observació del seu moviment? Abans dels descobriments d'Isaac Newton semblava impossible dir alguna cosa significativa sobre quina massa tenien els estels llunyans o, fins i tot, el Sol. Newton va fer importants descobriments en el camp de la gravitació, descobriments que permeten als astrònoms actuals respondre a aquestes preguntes de manera rutinària.

Sens dubte, el treball científic més important de Newton són els *Principis Matemàtics de la filosofia natural*, el títol original, en llatí, era *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, (Figura 5). Sovint ens hi referim com els “*Principia* de Newton”. Aquest llibre és considerat per molts com el resultat més important aconseguit per l'intel·lecte humà. Va ser publicat l'any 1687 i fa una descripció completa de les lleis de la mecànica i de la gravitació. Explica el moviment orbital dels planetes, es dedueixen les lleis de Kepler del moviment dels planetes, perquè es produeixen les marees, etc. 300 anys després de la formulació d'aquesta llei de gravitació, els científics encara la fan servir cada dia. Aquestes lleis permeten llançar naus i sondes espacials cap a planetes llunyans, posar satèl·lits en òrbita i mesurar la massa dels estels i de les galàxies.

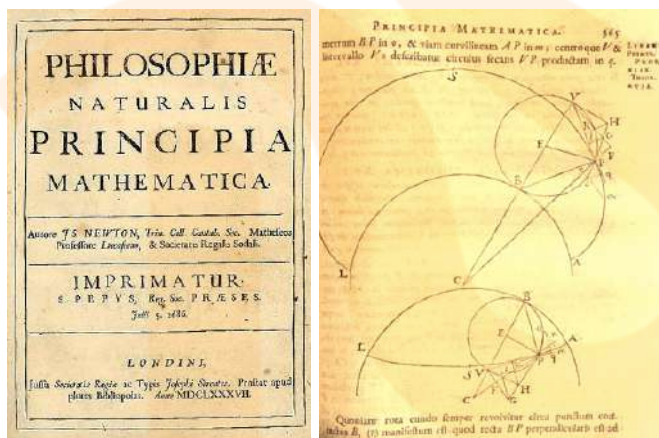


Figura 5. Els “*Principia*” d’Isaac Newton. La geometria és l’eina matemàtica amb què es van construir

2.1 La llei de gravitació universal

Probablement coneixeu la història de la poma que li va caure al cap a Newton mentre descansava al jardí de casa. Encara avui es pot visitar un descendent d’aquella pomera al jardí de Woolsthorpe Manor a Lincolnshire, on va viure Newton la seva infantesa. La llegenda diu que aquell fet li va inspirar el concepte de la llei de gravitació universal.

Newton va plantejar-se si la força que feia caure una poma (un objecte) era la mateixa que la que fa moure la Lluna i els planetes. Sabia com trobar l’acceleració d’una poma quan cau sobre la superfície de la Terra, i va decidir trobar l’acceleració de la Lluna cap a la Terra de la mateixa manera. Sabia que el radi de l’òrbita de la Lluna era uns 60 cops més gran

que el radi de la Terra i va comprovar que si la mateixa llei s'aplicava als objectes del cel, l'acceleració de la Lluna sobre la Terra hauria de ser $(60)^2$ vegades menor. I ho era! Hi havia una llei que depenia inversament del quadrat de la distància per a la gravetat a la Terra i a al cel.

L'adjectiu 'universal' de la llei de gravitació és essencial ja que remarca la idea fonamental de Newton: l'atracció gravitatòria entre masses es produeix en *qualsevol lloc de l'univers*. Amb Newton el moviment de caiguda dels cossos sobre la Terra i el moviment dels astres en el firmament esdevingueren la mateixa cosa. Les forces gravitatòries que actuaven entre els objectes a la Terra eren les mateixes que entre els objectes a l'espai.

Isaac Newton

“Copèrnic, Brahe, Kepler i Galileu van establir els principis sobre els quals es fonamenta l'astronomia moderna. Després d'ells arribaria el més genial de tots: Isaac Newton”.

Així comença, la filmació que podeu veure al web

www.nostranau.net/isaac-newton ,

i que introdueix el model de Newton de l'univers.

(Aquest vídeo també es pot troba a <http://www.nostranau.net/index>)

Newton afirmava en els “Principia” que la força d'atracció gravitatòria entre dos cossos és directament proporcional a les seves masses. També afirmava que la força que fa un cos de massa m_1 sobre un altre de massa m_2 té el mateix valor que la que fa el segon sobre el primer. De tot això es dedueix que la intensitat de la força gravitatòria, F_g , és proporcional al producte de les masses

$$F_g \propto m_1 \times m_2$$

Estudiant el moviment de la Lluna al voltant de la Terra, Newton va poder deduir com la força d'atracció gravitatòria entre la massa de la Terra i la massa de la Lluna depenia de la distància de separació entre elles. Es va adonar que la força gravitatòria entre la Terra i la Lluna havia de ser la força centrípeta necessària per a mantenir la Lluna en moviment circular uniforme al voltant de la Terra. Mitjançant un enginyós argument matemàtic, va poder deduir que la força gravitatòria Terra-Lluna disminueix de manera inversament proporcional al quadrat de la distància

$$F_g \propto \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

on r és la distància entre els centres de les dues masses (Figura 6).

Per a convertir aquesta relació en una equació (igualtat) és necessària una constant de proporcionalitat. Aquesta constant és la **constant de gravitació universal** i es representa per G . L'expressió matemàtica definitiva de la **lei de gravitació universal** és

$$F_g = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \quad (1)$$

i diu que:

“La força d’atracció gravitatòria és directament proporcional al producte de la massa dels cossos i inversament proporcional al quadrat de la distància que els separa”.

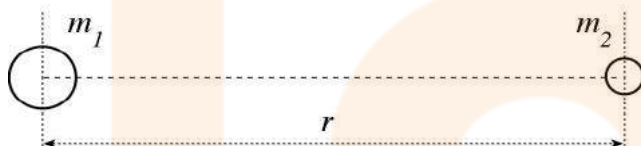


Figura 6. Dues masses, m_1 i m_2 , separades una distància r

Mesurar la constant de gravitació G , experimentalment, és difícil perquè la força gravitatòria és d'intensitat molt petita, a no ser que una de les masses sigui molt gran. Podria pensar-se en calcular-la a partir de la força entre dos cossos molt grans com la Terra i la Lluna. En la pràctica això no és possible perquè se'n desconeixen les masses. De fet, es farà servir l'equació de la llei de gravitació per a calcular-les una vegada es conegui el valor de la constant G . Aquest valor no es pot obtenir d'observacions astronòmiques, és un valor que es determina empíricament mitjançant experiments de laboratori molt delicats en què s'ha de mesurar la força, molt petita, entre masses conegudes. Així s'obté el valor

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

Qüestions

- 4 Feu servir l'Equació 1 per a deduir les unitats de la constant de gravitació G en el sistema internacional d'unitats.
- 5 Calculeu la força amb la qual el Sol atrau el planeta Mart i compareu-la amb la força amb la qual cada un de vosaltres atrau (gravitatòriament!) el seu company/a més pròxim.
Dades: massa del Sol = $1,99 \cdot 10^{30}$ kg, massa de Mart = $6,42 \cdot 10^{23}$ kg, distància mitjana entre Mart i el Sol = 226 milions de km.

Solució: $1,67 \cdot 10^{21}$ N

ACTIVITAT 7 Llei de gravitació

A la Taula 1 es llisten algunes parelles d'objectes, les seves masses i la distància que els separa. Determineu el valor de la força gravitatòria entre els objectes i completeu la taula.

Objectes	massa/kg	massa/kg	distància/m	F_g / N
Lluna - Terra	$7,35 \cdot 10^{22}$	$5,98 \cdot 10^{24}$	$3,85 \cdot 10^8$	
Terra - Sol	$5,98 \cdot 10^{24}$	$1,99 \cdot 10^{30}$	$1,49 \cdot 10^{11}$	
Lluna - Sol	$7,35 \cdot 10^{22}$	$1,99 \cdot 10^{30}$	$1,49 \cdot 10^{11}$	
Persona en la superfície de la Terra	60,0	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,38 \cdot 10^6$	
Persona en la superfície de la Lluna	60,0	$7,35 \cdot 10^{22}$	$1,74 \cdot 10^6$	
Dues persones una al costat de l'altra	60,0	60,0	1,00	
Electró – protó	$9,11 \cdot 10^{-31}$	$1,67 \cdot 10^{-27}$	$5,3 \cdot 10^{-12}$	

Taula 1. Dades per a l'Activitat 7

2.2 Camp i força

La força gravitatòria que fa el Sol sobre la Terra fa que aquesta orbiti al seu voltant. Aquesta força té les següents característiques:

- És sempre atractiva.
- Com més lluny se situa la segona massa, més feble és la intensitat de la força.
- La força d'atracció que exerceix la primera massa sobre una altra massa va dirigida al llarg del radi que les uneix.

La interacció entre el Sol i la Terra és una acció a distància. Aquest fet es pot veure d'una altra manera considerant que la Terra interacciona amb el **camp gravitatori** del Sol. El camp fa de mitjancer entre ambdues masses. El camp gravitatori és un exemple de **camp de forces**. En general, es diu que en una regió de l'espai hi ha un camp de forces quan, en posar-hi una partícula, aquesta experimenta una força. En el cas de partícules amb massa, es diu que la primera ha creat un **camp de forces gravitatori** al seu voltant.

La gravetat segons Einstein

Què passaria si el Sol desaparegués? En aquest cas, la força radial desapareixeria de manera instantània i per tant la Terra i la resta de planetes sortirien de la seva òrbita emprant una trajectòria rectilínia, d'acord amb la primera llei de Newton. Ara bé, això no és així de fàcil. Einstein va donar una explicació a aquesta situació, introduint un seguit de conceptes que poden ajudar a “visualitzar” la gravetat.

<https://www.youtube.com/watch?v=3dPi5hIWlkM>

2.2.1 Camp de forces i línies de camp

La presència d'una massa en l'espai s'evidencia perquè en situar una altra massa a una certa distància de la primera, aquesta segona massa experimenta una força d'atracció gravitatòria.

El camp de forces que crea una massa es pot representar mitjançant línies rectes que surten radialment de la massa. Les línies de força se separen en allunyar-se de la massa i disminueixen la seva intensitat, tal com mostra la Figura 7 (com més juntes estan les línies, més gran és la intensitat del camp). Aquestes línies s'anomenen **línies de camp** o **línies de força**, i permeten “visualitzar” el camp creat en l'espai.

El fet que la força entre les masses és atractiva es representa mitjançant un vector situat en la segona massa, que va dirigit en la recta que uneix el centre de les dues masses i apuntant cap a la massa que crea el camp. En el cas del sistema Terra-Lluna es pot dir que la Terra crea un camp gravitatori al seu voltant i la Lluna experimenta la força d'atracció gravitatòria, tal com es va veure en la unitat de *Satèl·lits a l'espai* del curs de primer (Figura 8).

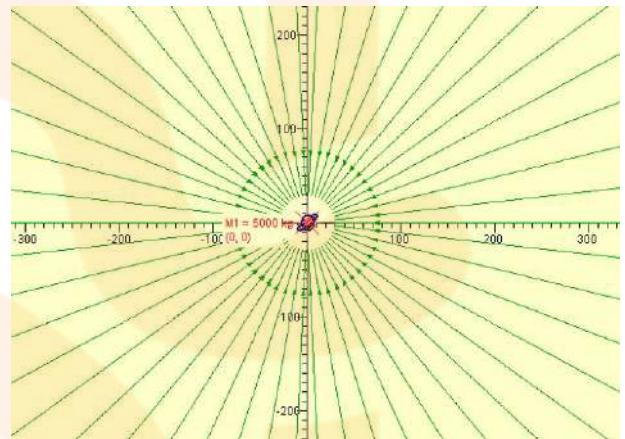


Figura 7. Representació de les línies de camp radials, amb la massa que crea el camp al centre. Les “fletxes” indiquen el sentit de la força d'atracció que actuaria sobre una altra massa situada en un punt de l'espai

2.2.2 Camp gravitatori

El concepte de camp ofereix una alternativa a la explicació de les interaccions que tenen lloc per mitjà de forces a distància. En unitats posteriors d'aquest curs es veurà que hi ha d'altres camps de forces com, per exemple, el camp electrostàtic que creen les partícules carregades elèctricament. Es diu que en l'espai hi ha un camp gravitatori quan un objecte d'una certa massa m , situat en l'espai, experimenta una força d'atracció gravitatòria, $\vec{F}_g$. El **camp gravitatori**, $\vec{g}$, es defineix com el quocient entre la força gravitatòria i la massa m de l'objecte que la rep

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} \quad (2)$$

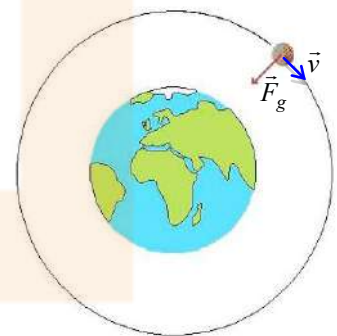


Figura 8. La força d'atracció gravitatòria, $\vec{F}_g$, radial i dirigida cap al centre de la Terra manté el satèl·lit en òrbita

El camp gravitatori és una magnitud vectorial i cada punt de l'espai té associat un vector camp, $\vec{g}$,

- la direcció i el sentit del qual estan determinats per la direcció i el sentit de la força gravitatòria que actuaria sobre la massa col·locada en aquest punt.
- el valor del qual és la intensitat de la força gravitatòria que actuaria sobre la unitat de massa en aquest punt.

La unitat de la intensitat del camp gravitatori en el SI és el $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

El camp gravitatori d'una massa puntual o esfèrica

Per a simplificar el tractament del camp gravitatori es considerarà que les masses són puntuals. Una massa puntual M és un cos amb tota la massa concentrada en un punt. Imagineu una altra massa m col·locada a una distància r . El valor de la força gravitatòria entre elles serà

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2} \quad (3)$$

i la intensitat del camp gravitatori que crea la massa M és

$$g = \frac{F_g}{m} = \frac{G \frac{Mm}{r^2}}{m}$$

Fent les operacions i simplificant s'obté

$$g = G \frac{M}{r^2} \quad (4)$$

Aquesta expressió també permet calcular el camp gravitatori creat per una massa esfèrica en punts exteriors a ella, com si tota la massa M estigués concentrada en el centre de l'esfera. En aquest cas, r és la distància del punt al centre de la massa.

La Figura 9 mostra el camp gravitatori al voltant d'un planeta (o de qualsevol massa esfèrica) de massa M . A cada punt de l'espai es dibuixa un vector dirigit cap al centre de l'esfera i de longitud proporcional a la força que experimentaria 1 kg de massa en aquell punt. Noteu que aquest camp té simetria radial o esfèrica. Això significa que el valor de la seva intensitat depèn només de la distància al centre de la massa M . Noteu que la longitud de les fletxes disminueix de manera inversament proporcional al quadrat de la distància.

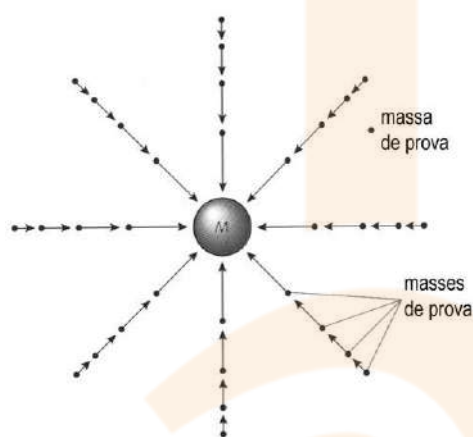


Figura 9. Camp gravitatori al voltant d'un planeta esfèric de massa M

En general, el valor de la força gravitatòria que actua sobre un cos de massa m en un punt de l'espai, és igual al seu pes,

$$F_g = mg = pes \quad (5)$$

on g és la intensitat del camp gravitatori en el punt on està situat el cos o l'acceleració de la gravetat en el punt. El concepte d'acceleració de la gravetat permet expressar el camp gravitatori en unitats de $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Qüestions

- 6 El planeta Mart té una massa de $6,42\cdot 10^{23}$ kg i un radi de $3,40\cdot 10^6$ m.

- (a) Calculeu la intensitat del camp gravitatori a la superfície de Mart.
(b) Calculeu el vostre pes a la superfície del planeta.

Solució: $3,70 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}$
Solució: 222 N

- 7 Suposant que un planeta de radi R té una densitat uniforme, ρ , demostreu que la intensitat del camp gravitatori a la superfície del planeta ve donada per l'expressió

$$g = \frac{4\pi R\rho G}{3}$$

Ajuda: el volum, V , d'una esfera de radi R és igual a

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

El camp gravitatori creat per diverses masses puntuals

Per a trobar el camp gravitatori en un punt de l'espai on la influència gravitatòria de diferents astres és important, cal trobar el camp gravitatori que crea cada astre i fer-ne la suma vectorial.

ACTIVITAT 8 Camp gravitatori



Amb ajuda d'una miniaplicació es tracta, en primer lloc, de simular el camp de forces creat per una massa. Després, utilitzareu la mateixa miniaplicació per simular el camp gravitatori que creen les masses puntuals en l'espai, observant la direcció del vector camp gravitatori i les línies de camp.

<http://www.fislab.net>

Exemple resolt

Una nau espacial es troba a la línia que uneix la Terra i la Lluna, a 10.000 km del centre de la Lluna i 370.000 km del centre de la Terra.

(a) Quant val el camp gravitatori en la posició de la nau?

(b) Si en aquest punt es troba una nau, quina és la força gravitatòria sobre aquesta si la seva massa és de $1 \cdot 10^4$ kg?

Dades: Massa de la Lluna, $M_{LL} = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, massa de la Terra, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg

Resolució. Per a trobar el camp gravitatori cal tenir en compte el caràcter vectorial del camp gravitatori. La Figura 10 mostra una esquema de la situació: dues masses separades una certa distància i el punt on cal trobar la gravetat.



Figura 10. La Terra, la Lluna i el punt on es troba la nau

on g_{LL} és el valor de la gravetat creada per la Lluna i g_T la gravetat creada per la Terra en el punt en qüestió.

(a) Es dibuixen el vector camp gravitatori que crea la Terra i el vector camp gravitatori que crea la Lluna en el punt. Aquests vectors estan en la recta que uneix el centre de la Terra i el de la Lluna i cadascun apunta cap al centre de la massa que crea el camp. Per tant, són dos vectors en la mateixa direcció i en sentits contraris. Per a trobar el camp gravitatori en el punt caldrà restar el mòdul dels vectors gravetat i donar el sentit del més gran.

Aplicant l'Equació 4, es calcula el mòdul de cada un d'aquests vectors

$$g_{LL} = G \frac{M_{LL}}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{7,35 \cdot 10^{22}}{(1 \cdot 10^7)^2} = 4,91 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g_T = G \frac{M_T}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(37 \cdot 10^7)^2} = 0,29 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Com que tenen la mateixa direcció i sentits oposats, el camp resultant va dirigit cap a la Lluna i té per mòdul

$$g = g_{LL} - g_T = 4,62 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(b) La força gravitatòria sobre la nau (o pes) pot calcular-se com

$$pes = mg = 1 \cdot 10^4 \text{ kg} \times 4,62 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 462 \text{ N}$$

dirigit cap a la Lluna, igual que la gravetat.

ACTIVITAT 9 Mesura de la gravetat

En aquesta activitat mesurareu experimentalment el valor de l'acceleració de la gravetat en la caiguda lliure d'un objecte.

2.2.3 El camp gravitatori terrestre**La llei de gravitació**

El següent vídeo de la sèrie “Universo Mecánico” us parla del camp gravitatori de la Terra i de la Lluna.

<https://www.youtube.com/watch?v=IdF631iQTNM>

La Terra no és perfectament esfèrica ja que el radi terrestre varia una mica dels pols a l'equador. A més, la seva densitat no és homogènia i els efectes del moviment de rotació de la Terra fan variar el valor de la gravetat des dels pols fins a l'equador. Encara i així, per a simplificar, el valor de la intensitat del camp gravitatori a la superfície de la Terra es considera que és el mateix a tota la superfície. Aquest valor sovint es representa per $\vec{g}_0$ i té un valor aproximat de $9,8 \text{ N kg}^{-1}$, o bé, $9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Qüestions

- 8 Calculeu la intensitat de camp gravitatori a la superfície del planeta Terra suposant que la densitat del planeta és homogènia i que qualsevol punt de la superfície es troba a la mateixa distància, R_T (radi mitjà) del centre de la Terra.
Dades: radi de la Terra $R_T = 6.380 \text{ km}$, massa de la Terra, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ i $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Solució: $9,80 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}$

- 9 Quina és la gravetat en un punt de l'espai que es troba a una alçada, respecte de la superfície de la Terra, de dos radis terrestres?
Dades: radi de la Terra $R_T = 6.380 \text{ km}$, massa de la Terra, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ i $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Solució: $g = 1,09 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}$

Qüestions

- 10 Calculeu el valor de la intensitat del camp gravitatori terrestre a les següents alçades sobre la superfície terrestre i el pes d'una sonda espacial de 100 kg de massa. Expressau el resultat amb tres xifres significatives.

- (a) 10 m
- (b) 100 m.
- (c) 1.000 m.
- (d) 10.000 m.

DADES: radi de la Terra $R_T = 6.380$ km, massa de la Terra, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg i $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

Solució: 9,80 N·kg⁻¹; 980 N

Solució: 9,80 N·kg⁻¹; 980 N

Solució: 9,80 N·kg⁻¹; 980 N

Solució: 9,77 N·kg⁻¹; 977 N

- 11 Expliqueu com variarà el pes d'un cos que es mou des de la superfície de la Terra fins a la superfície de la Lluna. Canviarà la seva massa durant el viatge?

- 12 Un astronauta camina sobre la superfície de la Lluna, que té un radi mitjà de $1,74 \cdot 10^3$ km i una massa de $7,35 \cdot 10^{22}$ kg. Quant pesa aquest astronauta a la Lluna en relació al seu pes a la superfície de la Terra?

- 13 El valor de la densitat de la Terra que Henry Cavendish va obtenir amb el seu experiment va ser de $5,45$ g·cm⁻³. Si es considera que la Terra és una esfera de radi 6.380 km.

- (a) Quina és la massa de la Terra?
- (b) Quin és el valor de la constant de gravitació si el valor de la intensitat del camp gravitatori a la superfície de la Terra és $9,8$ N·kg⁻¹.

Solució: $5,93 \cdot 10^{24}$ kg

Solució: $6,73 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

- 14 A quina altura des de la superfície de la Terra la intensitat del camp gravitatori és redueix

- (a) A la meitat del seu valor en la superfície?
- (b) A un quart del seu valor en la superfície?

Dada: $R_{\text{Terra}} = 6.380$ km

Solució: 2.642,7 km

Solució: 6.380 km

- 15 La massa del planeta Mart és 0,11 vegades la massa de la Terra i el seu radi és 0,53 vegades el de la Terra.

- (a) Quina és la gravetat en la superfície de Mart?
- (b) Si els marcians existeixen i fessin una visita a la Terra, ho trobarien fàcil o difícil això de moure's per la Terra?

Solució: $3,8$ m·s⁻²

ACTIVITAT 10 Com varia la gravetat amb l'alçada?

Per a alçades petites el valor de la intensitat del camp gravitatori es pot considerar constant, però si es consideren altures grans aquest valor disminueix considerablement. En el cas dels planetes i els satèl·lits, aquests orbiten a altures prou grans com perquè la gravetat no es pugui considerar igual a la gravetat a la superfície del planeta.

En aquesta activitat utilitzareu un full de càlcul per a calcular el valor de la gravetat a moltes altures diferents des de la superfície de la Terra i analitzareu els resultats.

2.2.4 Calcular la massa d'un astre

La llei de gravitació de Newton permet calcular la força d'atracció gravitatòria entre dues masses, ja siguin dos àtoms o dues estrelles. La llei és especialment útil per a calcular la massa d'estels i planetes. El mètode que es fa servir és de gran importància en astronomia, ja que encara és l'única manera per a determinar aquesta magnitud.

La Figura 11 mostra dos objectes que interactuen gravitatòriament, movent-se en les seves òrbites. Si la massa d'un d'ells és molt més gran que la de l'altre, resta pràcticament en repòs mentre que l'objecte menys massiu orbita al seu voltant (Figura 11a). Si els dos objectes tenen una massa comparable, es mouen com mostra la Figura 11b, al voltant d'un punt X (el centre de masses del sistema) que roman en repòs mentre les dues masses ocupen posicions diametralment oposades. Els dos objectes poden ser un planeta i una de les seves llunes, un estel i un planeta, o dues estrelles –en aquest cas s'anomenen un parell binari d'estrelles o, sovint, tot el conjunt, una estrella binària. Us pot resultar sorprenent saber que moltes estrelles pertanyen a un grup binari o són membres d'un sistema múltiple mentre que les estrelles com el Sol són minoritàries (i, per tant, els sistemes planetaris amb una única estrella també). Us imagineu com seria viure en un planeta d'un sistema solar binari? Què passaria amb el dia i la nit?

Per a veure com es determina la massa d'una estrella o d'un planeta, considereu la situació de la Figura (11a), on una massa petita, m , es mou amb una velocitat de mòdul constant v al voltant de la massa gran, M , en una òrbita circular de radi r . Perquè la massa m giri al voltant de M ha d'existir una força centrípeta de mòdul F que actuï sobre m . Aquesta força, segons la segona llei de Newton, està dirigida cap al centre de M i val

$$F = ma_n = m \frac{v^2}{r} \quad (6)$$

La força d'atracció gravitatòria entre les dues masses és la que origina la força centrípeta. De fet, és aquesta força la que manté la massa m en òrbita. Si la força centrípeta desapareix de sobte, l'objecte es mouria en línia recta cap a on apuntés el vector velocitat en el moment de desaparèixer la força. Així,

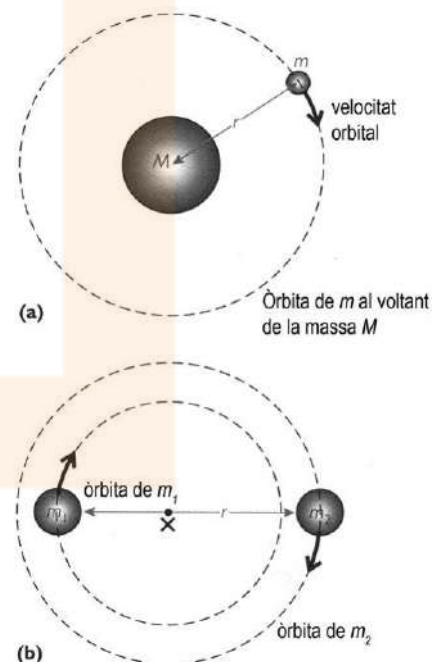


Figura 11. Dos astres en òrbita.
(a) $M \gg m$ i (b) $m_1 \sim m_2$

$$F_g = F \text{ on } F_g = G \frac{Mm}{r^2} \quad (7)$$

Substituint i fent una mica d'àlgebra s'obté

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Eliminant la massa m , el radi r i reordenant l'expressió s'obté

$$M = \frac{v^2 r}{G}$$

El valor de la velocitat de la massa m en la seva òrbita, v , depèn del radi de l'òrbita, r , i del temps que tarda en fer una volta (període, T)

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (8)$$

Substituint en l'Equació 7, l'equació anterior, s'obté l'expressió

$$M = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 \times \frac{r}{G} = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G} \quad (9)$$

L'Equació 9 permet determinar la massa M situada al centre de l'òrbita si es coneix el radi de l'òrbita i el període del moviment de la massa m al voltant de M . Aquestes dades són mesures experimentals que es poden obtenir mesurant el radi de l'òrbita i el període d'alguna de les llunes del planeta. Noteu que la massa m del cos que recorre l'òrbita no apareix a l'Equació 9, és a dir no cal conèixer m . Però, és clar, m tampoc es pot calcular amb aquest procediment!

L'anàlisi de la situació representada a la Figura (11b) és més complicada, però porta a la mateixa expressió. En aquest cas, però, M representa la massa total del parell d'estrelles ($M = m_1 + m_2$). L'anàlisi també permet determinar la massa de cada estrella del conjunt.

En definitiva, per a mesurar la massa d'una estrella o d'un planeta ha d'existir un efecte gravitacional observable sobre un altre objecte astronòmic, normalment, una altra estrella o un satèl·lit. En cas contrari, la massa de l'estrella s'ha de deduir per altres mitjans.

Exemple resolt

Qüestió. La Terra dóna una volta al Sol cada 365,25 dies en una òrbita que és aproximadament una circumferència de 150 milions de quilòmetres de radi. Amb aquestes dades calculeu la massa del Sol.

Resolució. Es pot considerar que l'única força que actua sobre la Terra és deguda a l'atracció del Sol (també hi ha l'atracció de la Lluna o d'altres planetes, però són forces molt més petites en comparació).

Aplicant la segona llei de Newton i substituint la força gravitatòria i l'acceleració centrípeta a què està sotmesa la Terra s'obté

$$G \frac{M_{\text{Sol}} m_{\text{Terra}}}{R_{S-T}^2} = m_{\text{Terra}} \frac{v^2}{R_{S-T}}$$

on M_{Sol} i m_{Terra} són la massa del Sol i de la Terra respectivament, R_{S-T} el radi de l'òrbita de la Terra al voltant del Sol i v la velocitat de translació de la Terra. Aïllant la massa del Sol, queda

$$M_{\text{Sol}} = \frac{v^2 R_{S-T}}{G}$$

La velocitat de la Terra a la seva òrbita, aproximadament circular, es pot expressar en funció de la velocitat angular ω i del període de translació T

$$v = \omega R_{S-T} = \frac{2\pi}{T} R_{S-T}$$

Substituint el valor del radi i del període s'obté el valor de velocitat de la Terra al voltant del Sol

$$v = \frac{2\pi}{365,25 \times 86.400} \times 150 \cdot 10^9 = 2,99 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

I la massa del Sol és

$$M_{\text{Sol}} = \frac{v^2 R_{S-T}}{G} = \frac{2,99 \cdot 10^4 \times 150 \cdot 10^9}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Qüestions

Dades:

Massa de la Terra = $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Radi de la Terra = 6.380 km

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Distància Terra-Sol = $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$

- 16** Calculeu la velocitat i el període de l'òrbita de l'Estació Espacial Internacional, considerant que gira al voltant de la Terra a 400 km d'altura.

Solució: $7,67 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $T = 5,55 \cdot 10^3 \text{ s}$

- 17** El planeta Terra té un moviment de translació al voltant del Sol de període 365 dies (1 any), i un moviment de rotació de 24 hores (1 dia).

- (a)** Calculeu la velocitat de la Terra al voltant del Sol i la velocitat d'un punt situat a l'equador terrestre al voltant de l'eix de la Terra en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

- (b)** Calculeu l'acceleració centrípeta de la Terra en el moviment de translació i en el moviment de rotació d'un punt de l'equador en $\text{km} \cdot \text{h}^{-2}$.

Solució: $108.000 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; $1.670 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Solució: $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-2}$; $440 \text{ km} \cdot \text{h}^{-2}$

Qüestions

- 18** S'estan descobrint planetes extra-solars (que giren al voltant d'altres estrelles). Al voltant de l'estrella "Gliese 876" se n'han trobat tres, anomenats Gliese 876 b, Gliese 876 c i Gliese 876 d. Es coneixen els seus períodes, que són, respectivament, de 61 dies, 30 dies i 46,5 hores. Calculeu el radi de les òrbites d'aquests planetes extra-solars, considerant que la massa de l'estrella Gliese 876 és de $6 \cdot 10^{29}$ kg.

Solució: $r_a = 30 \cdot 10^6$ km; $r_b = 19 \cdot 10^6$ km; $r_c = 3 \cdot 10^6$ km

- 19** Un dels possibles indicis de l'existència dels forats negres es pot trobar quan es detecta una estrella que gira molt ràpidament al voltant d'un punt en què aparentment no hi ha res. Considereu una estrella que descriu una òrbita de radi $1 \cdot 10^{12}$ m cada 100 dies. Trobeu l'acceleració a la qual està sotmesa i la massa del suposat forat negre.

Solució: $0,53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $8 \cdot 10^{33}$ kg

- 20** La força mitjana d'atracció del Sol a la Lluna és de $4,4 \cdot 10^{20}$ N. Considereu que entre el Sol i la Lluna i entre el Sol i la Terra hi ha la mateixa distància mitjana. Calculeu la massa de la Lluna. Dades: massa del Sol = $1,99 \cdot 10^{30}$ kg, distància mitjana entre el Sol i la Terra = $1,5 \cdot 10^{11}$ m.

Solució: $7,5 \cdot 10^{22}$ kg

2.2.5 Deduir la tercera llei de Kepler

Newton va demostrar que quan un cos, com per exemple un planeta o un cometa, es mou al voltant d'un centre, com el Sol, per acció d'una força que és inversament proporcional al quadrat de la distància, la seva trajectòria és una corba cònica (una el·lipse, una paràbola o una hipèrbola). Les trajectòries parabòliques i hiperbòliques són trajectòries obertes i només es poden aplicar a cossos que passin un sol cop a prop del Sol, com en el cas d'alguns cometes, mentre que les el·líptiques, que són tancades, les seguiran els planetes i altres astres, com havia trobat Kepler empíricament. Ara, a partir de la llei de la gravitació universal es poden deduir les tres lleis de Kepler.

Per a fer la demostració es considerarà que el planeta es mou amb una velocitat de mòdul constant v en una òrbita circular de radi r . La força gravitatòria és la força centrípeta que fa girar el planeta. Aquesta és la mateixa idea que ha permès escriure l'Equació 9. Reescriuint aquesta equació, s'obté

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (10)$$

Donat un valor de la massa del Sol M , l'Equació 10 correspon a la tercera llei de Kepler, ja que el segon membre de la igualtat és una constant

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{constant}$$

Qüestions

- 21** Ganimedes és la lluna més gran de Júpiter. La seva òrbita al voltant del planeta té un radi de $1,07 \cdot 10^6$ km i el període orbital és 7 dies, 3 hores i 43 minuts. Quina és la massa de Júpiter?

Solució: $1,9 \cdot 10^{27}$ kg

- 22** Els satèl·lits GPS (de l'anglès Global Positioning System) giren al voltant de la Terra dos cops al dia.

- (a) Trobeu el radi de l'òrbita d'un satèl·lit GPS.
- (b) Quina és la velocitat del satèl·lit en òrbita?
- (c) A quina altura, sobre la superfície de la Terra, està el satèl·lit?
- (d) Quant de temps tarda un senyal de ràdio en arribar al satèl·lit, just quan passa per sobre?

DADES: M (Terra) = $5,98 \cdot 10^{24}$ kg; R (Terra) = 6400 km

Solució: $2,7 \cdot 10^4$ km

Solució: $3.843,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Solució: 20.600 km

Solució: 68,7 ms



3 Viatjar fora del nostre planeta

Si es vol explorar l'espai exterior és evident que el més interessant, a banda de fer servir telescopis, és poder viatjar fora del nostre planeta. Durant molts segles aquesta possibilitat només va existir en la imaginació. Kepler ja somiava amb viatjar per l'espai i va deixar escrita la que potser fóra una de les primeres novel·les de ciència ficció “*El Somni*”, on relatava un hipotètic viatge a la Lluna. Finalment, el 20 de juliol de l'any 1969, tres astronautes americans arribaven a la Lluna (Figura 12). Fou l'experiment més gran realitzat mai per la humanitat. Basat en la llei de gravitació universal, els astronautes van anar i van tornar de la Lluna sans i estalvis. Newton no va fallar.

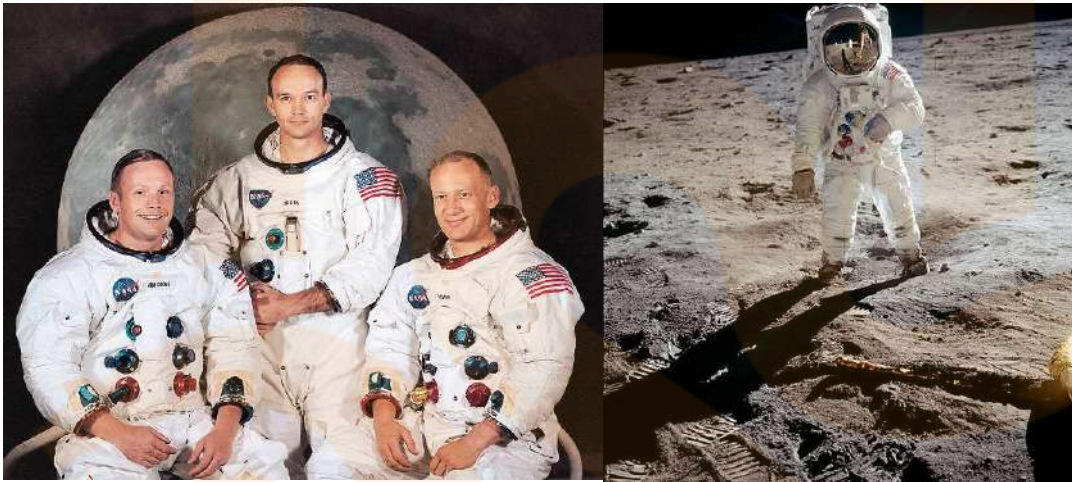


Figura 12. Els tres tripulants de l'Apollo 11 (d'esquerra a dreta): Neil Armstrong, Michael Collins i Edwin Aldrin. A la dreta, l'astronauta Aldrin fotografiat sobre la superfície de la Lluna per Armstrong (font NASA)

ACTIVITAT 11 L'exploració de l'espai



La distància que ens separa de la Lluna, en termes humans, és enorme. Però, a escala còsmica, és insignificant.

<http://www.nostranau.net/elipsi-de-lluna>

En el joc del billar, sovint per aconseguir una carambola s'ha de fer rebotar la bola a les bandes. Doncs bé, de vegades l'exploració dels planetes es fa com si es jugués una partida de billar.

<http://www.nostranau.net/billar-espacial>



Figura 13. Sputnik: el primer satèl·lit artificial llançat l'any 1957

Nota d'estudi

El fet que es pugui definir una **energia potencial gravitatòria**, es deriva de que la força gravitatòria és una força conservativa. Recordeu que el treball que fa una força conservativa sobre un objecte no depèn del camí que segueix, sinó només del punt d'inici i el punt del final en el seu desplaçament.

Altres forces conservatives són la força electrostàtica i la força elàstica. A cada força conservativa se li pot associar una energia potencial.

Un exemple de força no-conservativa és el fregament. No pot existir, per tant, una "energia potencial del fregament".

3.1 Llançar pedres enlaire, satèl·lits i naus espacials

Des del llançament del satèl·lit artificial rus Sputnik a l'octubre del 1957 (Figura 13), milers de satèl·lits han estat llançats des de la Terra i posats en òrbita amb diferents missions.

A tots ens resulta familiar el que passa quan es llança una pedra cap amunt. Primer: cal donar-li una velocitat inicial i segon: es veu com la velocitat va disminuint mentre guanya alçada, fins arribar a una alçada màxima on la velocitat es fa zero, després, tornar a caure. Per a posar un satèl·lit en òrbita al voltant de la Terra també cal donar-li una velocitat inicial. En termes energètics tant per a una pedra com per a un satèl·lit: l'energia cinètica inicial es va transformant en energia potencial de manera que l'energia mecànica sempre roman constant en absència de fregaments (principi de conservació de l'energia mecànica). Això permet calcular l'alçada màxima a què arriba la pedra.

$$E_{m0} = E_{mf} \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_{\max} \rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

L'equació obtinguda expressa clarament que com més gran sigui la velocitat inicial més gran serà l'alçada assolida per la pedra: si es llança el doble de ràpid pujarà quatre vegades més alt. Però tornarà a caure perquè la pedra haurà acumulat energia potencial gravitatòria. Això és desolador per al projecte d'abandonar el nostre planeta!

Prop de la superfície terrestre el camp gravitatori és pràcticament uniforme, la força d'atracció gravitatòria es pot considerar constant i l'energia potencial gravitatòria és proporcional a la variació en l'altura $E_{pg} = mg\Delta h$. Tanmateix, el raonament anterior conté una incorrecció: l'energia potencial gravitatòria no és igual a $mg\Delta h$ per a qualsevol alçada, essent $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Per altures grans aquesta aproximació és incorrecta, ja que l'acceleració de la gravetat disminueix amb l'alçada (Activitat 10).

En efecte, es pot demostrar que, quan s'acosta una massa m des de molt lluny (des de l'infinít) fins a una distància r d'una altra massa M , disminueix l'energia potencial gravitatòria, ΔE_{pg} , en una quantitat

$$\Delta E_{pg} = -G \frac{Mm}{r}$$

El signe negatiu indica que hi ha una pèrdua d'energia potencial gravitatòria en acostar la massa m a M ($E_{pg} < E_{pg0}$). Fent servir el conveni que dues masses infinitament separades no tenen energia potencial, és a dir, $E_{pg\infty} = 0$, es pot escriure

$$E_{pg} - E_{pg\infty} = E_{pg} = -G \frac{Mm}{r} \quad (11)$$

En definitiva, hi ha dues expressions per a l'**energia potencial gravitatòria**

$E_{pg} = mg\Delta h$ per a alçades “petites” i $E_{pg} = 0$ a nivell del mar

$E_{pg} = -G \frac{Mm}{r}$ per a alçades “grans” i $E_{pg} = 0$ quan $r = \infty$

L'Equació 11 de l'energia potencial gravitatòria indica que enlairar una massa m des de la superfície d'un planeta costa una certa quantitat d'energia per unitat de massa. Com més massiu sigui el planeta més energia cal per unitat de massa (costa més enlairar un cos a Júpiter que a la Terra).

L'energia potencial per unitat de massa es defineix com el **potencial gravitatori** en cada punt de l'espai, V_g . Matemàticament el potencial s'expressa com

$$V_g = \frac{E_{pg}}{m} = -G \frac{M}{r} \quad (12)$$

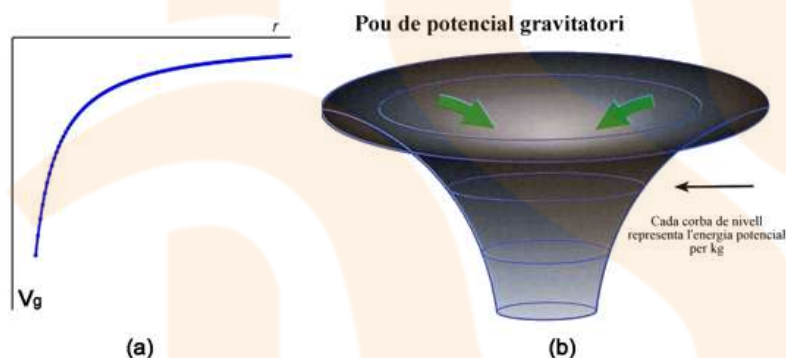


Figura 14. (a) Representació gràfica del potencial gravitatori en funció de r (b) El potencial gravitatori que crea una massa en l'espai es pot imaginar com un “pou” de potencial (Imatge adaptada de Advancing Physics A2)

La unitat del potencial gravitatori en el SI és el joule per quilogram de massa, $J \cdot kg^{-1}$. La Figura 14 mostra la representació gràfica del potencial gravitatori en funció del radi r (la distància entre les dues masses). Fixeu-vos en la dependència $-\frac{1}{r}$ del gràfic. El potencial gravitatori augmenta en allunyar-se del planeta.

El potencial gravitatori en l'espai es pot imaginar de manera anàloga a com es va fer en l'Activitat 8 pel camp gravitatori. Una massa, el Sol per exemple, crea un “pou” de potencial de manera que altres masses, els planetes, s'han de moure en òrbites al voltant del Sol per a evitar de caure sobre el Sol. El Sol es trobaria al fons del pou. Cada planeta també crea el seu propi pou de potencial en el qual les llunes orbiten. El pou de potencial fa que costi una certa energia llançar objectes enlaire, posar satèl·lits en òrbita o llançar sondes i naus espacials que escapin del pou definitivament per a no tornar a caure. En la Figura 14 es mostra un esquema del “pou” de potencial creat per una massa en l'espai. Cada corba de nivell representa l'energia potencial per quilogram que s'ha de

subministrar a una massa per enlairar-la. Cada corba de nivell representa un punt del gràfic V_g - r de l'esquerra.

3.1.1 Mapes de potencial gravitatori

El mapa de la superfície terrestre mostra el relleu de la superfície, les planes, muntanyes i depressions. Qualsevol de vosaltres sap interpretar un mapa excursionista on el que es projecta és el relleu de la zona en un pla. De manera semblant es pot fer un mapa del camp de potencial gravitatori. Si en el mapa de relleu es tracen les corbes de nivell unint els punts del relleu a la mateixa alçada, en el cas del mapa del camp de potencial són els punts amb el mateix potencial. En aquestes corbes de nivell el potencial és constant i per això s'anomenen **línies equipotencials**. Si en comptes d'un mapa pla, s'uneixen els punts en els quals el potencial té el mateix valor en tres dimensions s'obté una **superfície equipotencial**.

En el cas d'un planeta que se suposa homogeni i esfèric, les superfícies equipotencials són superfícies esfèriques concèntriques, ja que el potencial gravitatori és una funció de la distància al centre del planeta.

Les superfícies equipotencials tenen unes propietats molt interessants des del punt de vista dels viatges espacials:

- El treball per a desplaçar una massa per una superfície equipotencial és sempre nul.
- Les línies de camp gravitatori són sempre perpendiculars a la superfície equipotencial.

3.2 Satèl·lits en òrbita tancada

En la unitat 5 *Satèl·lits a l'espai* del curs de Física de primer, vareu estudiar la cinemàtica del moviment d'un satèl·lit en òrbita circular al voltant d'un planeta (Figura 8). Els satèl·lits propers a la Terra es mouen bastant ràpids amb períodes d'una hora i mitja. Els més llunyans tenen períodes més grans. La Lluna, molt més lluny encara, tarda un mes en donar una volta a la Terra. Aquesta relació entre el radi de l'òrbita d'un satèl·lit i el seu període ve determinada per la tercera llei de Kepler, tal com heu estudiat abans en aquesta unitat.

Hi ha una relació matemàtica entre la velocitat d'un satèl·lit i el radi de la seva òrbita? La resposta és afirmativa. Un satèl·lit que gira al voltant d'un planeta a una altura h de la superfície del planeta, experimenta una acceleració centrípeta que és deguda a la força d'atracció gravitatòria que exerceix el planeta. El valor de l'acceleració centrípeta, a_n , es pot expressar d'alguna de les maneres següents

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

on el radi de l'òrbita, r , és la distància del satèl·lit al centre del planeta, v el mòdul de la velocitat del satèl·lit en òrbita, ω la seva velocitat angular i T el període.

Aplicant la segona llei de Newton i substituint el valor de la força

d'atracció gravitatòria sobre el satèl·lit s'obté

$$F_g = ma_n \rightarrow G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Aquesta és una expressió molt interessant perquè, si s'aïlla, mostra que la velocitat d'un satèl·lit només depèn del radi de la seva òrbita

$$v = \sqrt{G \frac{M}{r}} \quad (13)$$

on M és la massa del planeta. Aquesta expressió, doncs, dona el mòdul de la velocitat del satèl·lit quan està en una òrbita de radi r .

Dit d'una altra manera: si es vol posar a girar un satèl·lit al voltant de la Terra a una alçada h sobre la superfície, ha de tenir una velocitat concreta

$$v = \sqrt{G \frac{M_{Terra}}{R_{Terra} + h}} \quad (14)$$

on $r = R_{Terra} + h$.

3.2.1 Energia mecànica d'un satèl·lit en òrbita

El principi de conservació de l'energia mecànica diu que l'energia, E_m , del satèl·lit en òrbita ha de ser constant si no hi ha fregament

$$E_m = E_c + E_{p_g} = \text{constant}$$

on E_c i E_{p_g} són l'energia cinètica i l'energia potencial del satèl·lit respectivament. Així, l'energia mecànica del satèl·lit és

$$E_m = E_c + E_{p_g} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r}$$

on m , v i r són la massa, la velocitat i el radi de l'òrbita del satèl·lit i M la massa del planeta. Substituint l'expressió de la velocitat del satèl·lit (Equació 13) en l'energia cinètica es troba que

$$E_c = \frac{1}{2}m \left(\frac{GM}{r} \right) = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$$

I si se substitueix en l'expressió de l'energia mecànica

$$E_m = E_c + E_{p_g} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} - G \frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r} \quad (15)$$

Aquesta expressió dona l'energia mecànica del satèl·lit en una òrbita determinada en funció només del radi de l'òrbita. Fixeu-vos que l'energia del

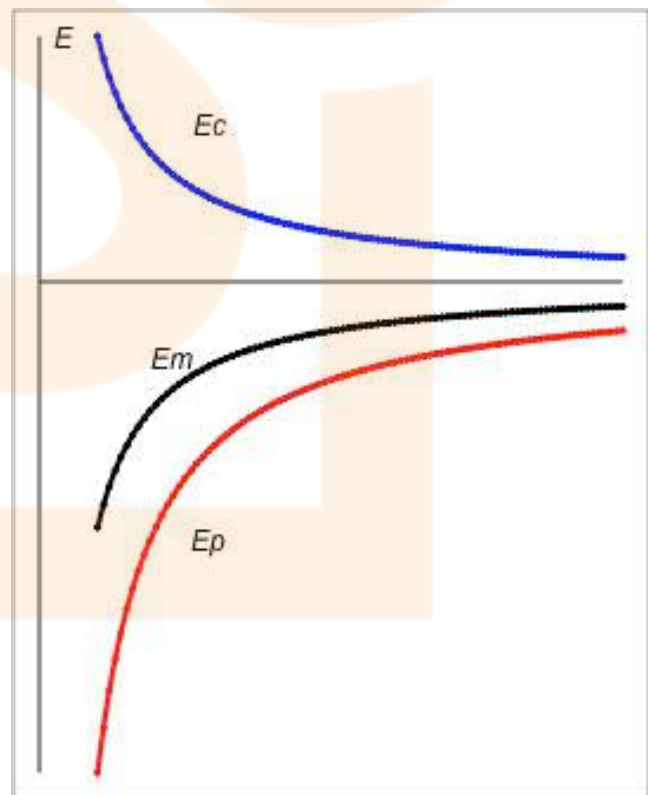


Figura 15. Representació gràfica de les energies E_c , E_p i E_m del satèl·lit en funció del radi de l'òrbita

satèl·lit és negativa!

En la Figura 15 es mostra la representació gràfica de les energies cinètica, potencial gravitatòria i mecànica d'un satèl·lit en funció del radi de l'òrbita. Fixeu-vos que l'energia cinètica és positiva i les energies potencial i mecànica són negatives.

Aquest gràfic dona informació sobre el moviment del satèl·lit en funció de l'energia. Si un satèl·lit gira al voltant d'un planeta amb una certa energia mecànica ho fa en una òrbita amb un cert radi. Si l'energia mecànica augmenta, el radi de l'òrbita també augmenta (s'allunya del planeta). Fixeu-vos que en aquest cas l'energia cinètica disminueix i per tant la velocitat disminueix, mentre que l'energia potencial augmenta. Per tant, com més a prop del planeta orbiti el satèl·lit més energia cinètica i menys energia potencial.

Val la pena remarcar que la condició per a què un satèl·lit pugui escapar és que la seva energia mecànica sigui zero. Si el satèl·lit té una energia mecànica negativa, està atrapat per l'acció gravitatòria del planeta amfitrió. Sembla raonable pensar que un objecte que s'apropi a un planeta amb una energia mecànica positiva escaparà de la seva influència per no tornar mai més.

Així, un satèl·lit amb energia mecànica negativa significa que està dins del camp gravitatori creat pel planeta i lligat a ell girant en una òrbita tancada el·líptica (o circular). Un satèl·lit amb $E_m \geq 0$ surt de l'acció del camp gravitatori i la seva trajectòria ja no pot ser el·líptica, és una òrbita oberta. Es pot demostrar que quan l'energia mecànica és nul·la, $E_m = 0$, la trajectòria és una paràbola i que quan $E_m > 0$ és una hipèrbola.

L'energia mecànica d'un satèl·lit

<https://www.geogebra.org/m/BBFNkJU7>

3.2.2 Velocitat d'escapament

Per a escapar de l'atracció de la Terra, doncs, una nau ha de sortir del pou de potencial gravitatori que crea el planeta. Dit d'una altra manera, la nau ha de passar d'una òrbita tancada a una d'oberta.

Tal com hem dit abans la condició necessària per a que una nau escapi és que la seva l'energia mecànica sigui com a mínim zero. Sota aquesta condició, es pot calcular quina ha de ser la velocitat mínima que ha de tenir la nau per escapar-se del pou. Aquesta velocitat és el que anomenem **velocitat d'escapament**.

Si considerem, per exemple que la nau "s'escapa" des de la superfície de la Terra

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{M_{Terra}m}{R_{Terra}} = 0$$

on v_e és el mòdul de la velocitat amb què es llança la nau des de la superfície de la Terra. Aïllant v_e s'obté

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_{Terra}}{R_{Terra}}} \quad (16)$$

que és la velocitat d'escapament de la Terra. Substituint els valors de la massa de la Terra i del radi terrestre es té el valor

$$v_e \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,98 \cdot 10^{24}}{6,38 \cdot 10^6}} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Aquest valor és la velocitat mínima que cal comunicar a la nau en el seu llançament per a què escapi definitivament del pou de potencial i no retorni a la Terra.

L'Equació 16 permet calcular la velocitat d'escapament de qualsevol planeta o satèl·lit si se substitueix la massa i el radi de la Terra per la massa i el radi del planeta o satèl·lit.

Qüestions

- 23** A partir de les dades de la Taula 2, trobeu la velocitat d'escapament des de la superfície dels diferents planetes del Sistema Solar. Compareu els resultats dels planetes tel·lúrics (Mercuri, Venus, Terra i Mart) amb les velocitats d'escapament dels planetes jovians (Júpiter, Saturn, Urà i Neptú).

Solució: $4,45 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $10,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $5,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $59,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $35,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $21,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; $23,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

- 24** Quina és la velocitat d'escapament del Sistema Solar per a una nau llançada des de la Terra? Dades: Massa del Sol = $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ i distància mitjana entre el Sol i la Terra = $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

Solució: $42,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

- 25** Calculeu les energies cinètica, potencial i mecànica del satèl·lit meteorològic NOAA, d'òrbita polar d'uns 900 km d'alçada sobre la superfície terrestre. La seva massa és d'uns 1000 kg.

Solució: $2,7 \cdot 10^{10} \text{ J}$; $-5,5 \cdot 10^{10} \text{ J}$; $-2,7 \cdot 10^{10} \text{ J}$

Planetes	massa /kg	radi /km
Mercuri	$3,63 \cdot 10^{23}$	2.440
Venus	$4,84 \cdot 10^{24}$	6.050
Terra	$5,98 \cdot 10^{24}$	6.380
Mart	$6,42 \cdot 10^{23}$	3.400
Júpiter	$1,9 \cdot 10^{27}$	71.400
Saturn	$5,7 \cdot 10^{26}$	60.000
Urà	$8,7 \cdot 10^{25}$	26.000
Neptú	$1,0 \cdot 10^{26}$	24.200

Taula 2. Dades per a la Qüestió 24

Qüestions

26 Un satèl·lit artificial de 1500 kg de massa descriu una trajectòria circular a una altura de 630 km de la superfície de la terra. Calculeu:

- (a) El període del satèl·lit
- (b) L'energia cinètica i l'energia mecànica del satèl·lit en òrbita
- (c) L'energia mínima que caldria comunicar al satèl·lit en òrbita perquè s'allunyés indefinidament de la Terra.

DADA: R (Terra) = 6.370 km; M (Terra) = $6 \cdot 10^{24}$ kg

Solució: 1,6 h

Solució: $4,29 \cdot 10^{10}$ J; $-4,29 \cdot 10^{10}$ J

Solució: $4,29 \cdot 10^{10}$ J

27 Una sonda espacial es dirigeix cap al planeta Mart després haver escapat del potencial gravitatori de la Terra. Quin "salt" de potencial gravitatori ha de superar encara per a arribar a l'òrbita de Mart? Dades: Massa del Sol = $2 \cdot 10^{30}$ kg, radi mitjà de l'òrbita de la Terra al voltant del Sol = $1,50 \cdot 10^8$ km i radi mitjà de l'òrbita de Mart al voltant del Sol = $2,26 \cdot 10^8$ km

Solució: $3 \cdot 10^8$ J·kg⁻¹

28 Justifiqueu què passa amb les energies cinètica i potencial d'un satèl·lit que perd energia mecànica.

3.2.3 Satèl·lits geoestacionaris

Newton no podia imaginar que la llei de gravitació acabés essent fonamental des del punt de vista de les comunicacions i de l'entreteniment televisiu. Dificilment es podia haver imaginat que en el futur mirar la televisió des del sofà de casa, pendent que la connexió via satèl·lit funcioni, seria un dels entreteniments de la societat. Per a què la comunicació entre el plató i el satèl·lit no falli cal que el satèl·lit giri al voltant de la Terra tan ràpid com ho fa la Terra, de manera que sempre "estigui" al mateix lloc, vist des de la Terra. Newton sabia com calcular el radi de l'òrbita d'aquest satèl·lit, ja que sabia com trobar el radi de l'òrbita a partir del període (tercera llei de Kepler). Aquests satèl·lits són els anomenats **satèl·lits geoestacionaris** (Figura 16). Tenen el mateix període orbital que la Terra i descriuen una òrbita circular per sobre de l'equador terrestre a una altura determinada per la tercera llei de Kepler.



Figura 16. El Meteosat, un satèl·lit geoestacionari (Font Ysangkok [Public Domain], via wikimedia commons)

Qüestions

- 29 Trobeu a quina altura des de la superfície terrestre orbiten els satèl·lits geoestacionaris. A quina velocitat es mouen? Expresseu-la en $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Solució: 35.800 km; $3.100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

- 30 Anoteu el nom d'alguns satèl·lits geoestacionaris i les seves aplicacions.

- 31 Penseu i expliqueu breument l'avantatge principal dels satèl·lits geoestacionaris i les seves utilitats principals. Expliqueu algun dels seus inconvenients.

- 32 La xarxa de satèl·lits meteorològics a nivell mundial no pot estar completa si només té satèl·lits geoestacionaris. Expliqueu per què i digueu com es diuen els satèl·lits que la completen.

- 33 Els satèl·lits mediambientals d'òrbita polar (POES) orbiten a poca altura per a obtenir informació més acurada. Un POES realitza 14,1 voltes a la Terra cada dia.

(a) Calculeu la velocitat i l'altura de l'òrbita d'un POES. Dades: Massa de la Terra = $5,98\cdot 10^{24} \text{ kg}$, radi de la Terra = 6380 km.

(b) Trobeu en quines aplicacions mediambientals s'utilitzen les dades dels POES.

Solució: 859 km; $7,42 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$

- 34 Calculeu l'energia mecànica d'un satèl·lit geoestacionari de 400 kg de massa. Dades: Massa de la Terra = $5,98\cdot 10^{24} \text{ kg}$, radi de la Terra = 6.380 km.

Solució: $-1,9\cdot 10^9 \text{ J}$

- 35 Es vol situar en òrbita un satèl·lit que passi sobre el pol Nord de la Terra cada 6 hores.

(a) Quins han de ser el radi i l'alçada de la seva òrbita?

(b) A quina velocitat es mourà?

(c) Prop del satèl·lit anterior en passa un altre a una altura lleugerament més gran. Compareu el període i la velocitat dels dos satèl·lits i indiqueu si seran majors o menors, i justifiqueu la resposta.

Solució: 16.767,1 km; $10.367,1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$
Solució: $4.877 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$



4 Últim recorregut

En aquesta unitat heu estudiat la llei de gravitació universal que regeix el moviment dels astres en l'univers. Heu començat la unitat fent una mirada a l'univers en una nit nítida i fosca. Una ràpida revisió de la història de l'astronomia mostra que totes les cultures han buscat i investigat els misteris de l'univers aixecant observatoris astronòmics (Figura 17) i fent representacions dels moviments dels astres i d'altres esdeveniments que tenen lloc en el firmament. El model heliocèntric de Copèrnic i les observacions dels astrònoms culminaren finalment en la llei de la gravitació universal de Newton.

La llei de gravitació de Newton permet calcular la força d'atracció gravitatòria entre dues masses, ja siguin dos cossos qualsevol a la Terra, dos àtoms o dues estrelles. Amb aquesta llei, finalment, el moviment dels astres era previsible. La llei és també útil per a calcular la massa dels planetes o del Sol, un cop conegut el valor de la constant de gravitació G . La determinació experimental d'aquesta constant requereix d'una gran precisió ja que la força d'atracció entre dues masses és molt petita. Henry Cavendish fou el primer científic en mesurar la força d'atracció gravitatòria entre dues masses en el laboratori l'any 1798. En l'experiment, Cavendish utilitzà una balança de torsió de gran precisió, per a trobar la densitat de la Terra. Més tard aquest resultat va ser utilitzat per a trobar el valor de la constant G . Però aquesta constant és tan difícil de mesurar que, fins i tot en l'actualitat, és la constant fonamental que es coneix amb menys precisió.

L'últim apartat sobre el repte de viatjar fora de la Terra introdueix el concepte de la velocitat d'escapament del camp gravitatori creat per un planeta i les condicions energètiques per aconseguir-ho.

ACTIVITAT 12 Mesurant la gravetat



L'estudi de la gravetat ha de permetre entendre millor el canvi climàtic. Per a dur a terme aquest estudi, l'Agència Espacial Europea (ESA) va llançar el satèl·lit GOCE.

<http://www.youtube.com/watch?v=rsRnxIeVVhw>



Figura 17. Observatoris astronòmics. Dalt: "El caracol" observatori astronòmic de la civilització maia en la ciutat de Chichén Itzá a la península del Yucatán a Mèxic (Font Régis Lachaume [Public Domain], via wikipedia commons). Sota: Cúpula de l'observatori de Roque de los Muchachos de Canàries (Font Frank Vincentz [CC-BY-SA-3.0], via wikipedia commons)

4.1 Objectius

Un cop estudiada aquesta unitat heu de ser capaços de:

- Conèixer l'evolució històrica dels models que descriuen l'univers: geocentrisme i heliocentrisme.
- Reconèixer l'estreta relació entre les creences i els mites i les observacions inicials, i el gran paper dels astrònoms i científics del segle XVII que culminaria amb la revolució científica d'aquest segle.
- Descripció i interpretació del Sistema Solar vist des de la Terra. Observació de planetes, el Sol i la Lluna en el cel o en planetaris o en planisferis informàtics.
- Enunciar les tres lleis de Kepler i aplicar-les en el càlcul dels paràmetres que caracteritzen les òrbites.
- Aplicar de la llei de la gravitació universal al càlcul de la força gravitatòria que actua sobre un cos quan es troba a la superfície d'un planeta i quan es troba a una certa altura.
- Identificar la força d'atracció gravitatòria com la força centrípeta dels planetes en òrbita (circular) i dels satèl·lits. Aplicació al càlcul dels paràmetres que caracteritzen l'òrbita: període, radi i velocitat.
- Entendre la importància del concepte de camp en la descripció de les interaccions a distància.
- Reconèixer i interpretar la intensitat de camp gravitatori creat per una massa en l'espai. Interpretar representacions del camp gravitatori mitjançant vectors i línies de força.
- Relacionar la intensitat de camp gravitatori i l'acceleració de la gravetat. Determinar el valor de la gravetat en les proximitats d'un astre.
- Determinar experimentalment el valor de la gravetat a partir de la mesura de l'acceleració d'una caiguda lliure.
- Aplicar la teoria de la gravitació a l'estudi dinàmic de situacions senzilles d'interès. Realitzar càlculs senzills a partir de dades reals.
- Reconèixer l'energia potencial gravitatòria i entendre l'aproximació que s'utilitza d'aquesta magnitud quan es tracten situacions on les altures són petites.
- Interpretar el potencial gravitatori creat per un planeta com l'energia potencial gravitatòria per unitat de massa que cal subministrar a un objecte per a allunyar-lo del planeta.
- Determinació de l'energia necessària per a posar un satèl·lit en òrbita circular al voltant de la Terra o per a enviar-lo fora del camp gravitatori de la Terra.
- Identificar la velocitat d'escapament com la velocitat que cal subministrar a un objecte per a què pugui sortir de la influència del camp gravitatori.
- Cercar informació sobre naus espacials i satèl·lits artificials, sobre els seus llançaments, trajectòries i paràmetres orbitals.

- Recollir informació sobre un projecte espacial i comunicar-la en una exposició oral.

4.2 Activitats i qüestions finals

ACTIVITAT 13 Un satèl·lit paradoxal

El núm. 6 de la revista *Recursos de física* us presenta una paradoxa interessant:

Si un satèl·lit que està en òrbita engega els coets propulsors, tot faria pensar que, en guanyar velocitat i, per tant, augmentar l'energia, s'hauria d'allunyar de la Terra i, per tant, hauria de passar a òrbites amb radis més grans. Però, paradoxalment, comprovem que justament les òrbites més allunyades de la Terra són les que tenen velocitats més petites. Com pot ser això?

<http://www.rrfísica.cat/>

Qüestions selectivitat

36 Els satèl·lits GPS (global positioning system, 'sistema de posicionament global') descriuen òrbites circulars al voltant de la Terra. El conjunt dels satèl·lits permet que en qualsevol punt de la Terra una persona amb un receptor GPS pugui determinar la posició on es troba amb una precisió de pocs metres. Tots els satèl·lits GPS estan a la mateixa altura i fan dues voltes a la Terra cada 24 hores. Calculeu:

- La velocitat angular dels satèl·lits i l'altura de la seva òrbita, mesurada sobre la superfície de la Terra.
- Si els satèl·lits descriguessin òrbites el·líptiques molt allargades al voltant de la Terra, de manera que la distància dels satèl·lits a la Terra variés molt, en lloc de les òrbites circulars de l'apartat a), en quina posició respecte de la Terra els satèl·lits anirien a una velocitat més gran? I en quina anirien a una velocitat més petita? Justifiqueu les respostes utilitzant arguments basats en l'energia.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{TERRA}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{TERRA}} = 6.380 \text{ km}$; $M_{\text{SAT}} = 150 \text{ kg}$.

Solució: $1,45 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $2,02 \cdot 10^7 \text{ m}$

37 L'òrbita de la Terra al voltant del Sol es pot considerar circular, amb un període d'un any i un radi d' $1,50 \cdot 10^8 \text{ km}$. Considerant únicament el sistema format pel Sol i la Terra:

- Calculeu la massa del Sol.
- Determineu l'energia mecànica total (cinètica i potencial) de la Terra.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{TERRA}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Solució: $2,01 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Solució: $-2,67 \cdot 10^{33} \text{ J}$

Qüestions selectivitat

38 El 4 d'octubre de 1957 es va llançar a l'espai el primer satèl·lit artificial, l'Sputnik 1, que va descriure una òrbita a 586 km d'altura sobre la superfície de la Terra. Suposant que aquesta òrbita era circular i sabent que la massa de l'Sputnik 1 era 83,6 kg, calculeu:

- (a) El període de rotació del satèl·lit en l'òrbita que descrigué al voltant de la Terra.
- (b) La velocitat a què anava l'Sputnik 1 en girar i la intensitat del camp gravitatori en la seva òrbita.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{TERRA}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{TERRA}} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Solució: 5,772 s

Solució: $7,57 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $8,24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

39 L'Estació Espacial Internacional (ISS, International Space Station) és fruit de la col·laboració internacional per a construir i mantenir una plataforma d'investigació amb presència humana de llarga durada a l'espai. Supposeu que la ISS té una massa de $3,7 \cdot 10^5 \text{ kg}$ i que descriu una òrbita circular al voltant de la Terra a una distància de $3,59 \cdot 10^5 \text{ m}$ des de la superfície. Calculeu:

- (a) La velocitat de l'Estació Espacial Internacional i el temps que triga a fer una volta a la Terra.
- (b) L'energia mecànica de la ISS. Justifiqueu el signe del valor trobat.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{TERRA}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{TERRA}} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Solució: $7,7 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 5492 s

Solució: $-1,1 \cdot 10^{13} \text{ J}$

40 El 15 d'octubre de 2003, la Xina va posar en òrbita la seva primera nau espacial tripulada, de manera que esdevingué el tercer país del món a assolir aquesta fita. La nau tenia una massa de 7 790 kg i un període orbital de 91,2 minuts. Calculeu:

- (a) L'altura de l'òrbita sobre la superfície de la Terra, si suposem que és circular.
- (b) L'increment d'energia cinètica que caldria comunicar a la nau quan es troba en òrbita, per a què s'allunyi indefinidament de l'atracció terrestre.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{TERRA}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{TERRA}} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Solució: $3,43 \cdot 10^5 \text{ m}$

Solució: $2,31 \cdot 10^{11} \text{ J}$

41 La distància mitjana del planeta Júpiter al Sol és 5,203 vegades la distància mitjana de la Terra al Sol. La massa de Júpiter és 317,8 vegades la massa de la Terra, i té un radi que és 10,52 vegades el radi terrestre. Supposem que les òrbites dels planetes que giren al voltant del Sol són circulars. Calculeu:

- (a) La durada de l'«any» de Júpiter, és a dir, el temps que triga Júpiter a fer una volta entorn del Sol.
- (b) La velocitat d'escapament a la superfície de Júpiter.

Dades: $R_{\text{TERRA}} = 6.367 \text{ km}$; $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Solució: 11,87 anys

Solució: $6,14 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Qüestions selectivitat

42 A la Taula 3 disposem de dades sobre el Sistema Solar.

- (a) Calculeu el valor de la constant de la tercera llei de Kepler per a Venus, Júpiter i Saturn. Expresseu-la amb les xifres significatives adequades i amb les unitats que figuren en la taula. Amb els valors calculats, determineu el valor més correcte de la constant per al Sistema Solar.
- (b) Calculeu la massa del Sol i l'acceleració de la gravetat a la superfície de Mart.

Dades:

$$1 \text{ UA} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$R_{\text{Terra}} = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$M_{\text{Terra}} = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

Solució: $1 \text{ any}^2/\text{UA}^3$

Solució: $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; $3,70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

43 Contesteu les següents preguntes:

- (a) A la superfície d'un planeta, l'acceleració de la gravetat és $g_s = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, i a una altura $h = 100 \text{ km}$, és $g_h = 8,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Determineu el radi d'aquest planeta.
- (b) És possible que un satèl·lit artificial orbiti al voltant de la Terra a una velocitat de 10 km/s ? Calculeu l'hipotètic radi d'aquesta òrbita i compareu-lo amb el radi de la Terra per a justificar la resposta.

Dades: $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Terra}} = 6.371 \text{ km}$;
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Solució: 5.850 km

Planeta	Distància mitjana al Sol (UA)	Període orbital (anys)	Radi mitjà / R_{Terra}	Massa / M_{Terra}
Mercuri	0,387	0,2408	0,386	0,055
Venus	0,723	0,6152	0,949	0,815
Terra	1	1,000	1	1
Mart	1,52	1,881	0,532	0,107
Júpiter	5,20	11,86	11,2	318
Saturn	9,54	29,45	9,45	95
Urà	19,2	84,02	4,01	14
Neptú	30,1	164,8	3,88	17

Taula 3. Dades per a la Qüestió 42

Qüestions selectivitat

44 El satèl·lit Terra de la NASA està dissenyat per a recollir dades sobre la superfície de la Terra, els oceans i l'atmosfera, amb l'objectiu d'estudiar la interrelació entre aquests medis i els sistemes biològics existents. El satèl·lit segueix una òrbita circumpolar (circular en el pla que passa pels dos pols) a 760 km de la superfície de la Terra i té una massa de $4,86 \cdot 10^3$ kg.

- (a) Quin és el període del moviment del satèl·lit en la seva òrbita?
- (b) Calculeu l'energia necessària que hem de subministrar al satèl·lit per a enviar-lo a la seva òrbita, si és llançat des de la superfície de la Terra.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$; $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{\text{Terra}} = 6,38 \cdot 10^6$ m.

Solució: $6,00 \cdot 10^3$ s
Solució: $1,68 \cdot 10^{11}$ J

45 El febrer del 2009 es va descobrir CoRoT-7b, un dels planetes extrasolars més petits trobats fins ara. El planeta CoRoT-7b gira al voltant de l'estel CoRoT-7, en una òrbita pràcticament circular de $2,58 \cdot 10^9$ m de radi, i fa una volta a aquest estel cada 20,5 h. La massa del planeta és $2,90 \cdot 10^{25}$ kg i té un radi de $1,07 \cdot 10^7$ m. Calculeu:

- (a) La massa de l'estel CoRoT-7.
- (b) L'acceleració de la gravetat en la superfície del planeta CoRoT-7b i la velocitat d'escapament en aquest planeta.

Dada: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Solució: $1,87 \cdot 10^{30}$ kg
Solució: $16,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $1,90 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

46 Al voltant de l'estrella WASP-18, que té una massa de $2,66 \cdot 10^{30}$ kg, s'ha descobert un planeta que gira en una òrbita aproximadament circular amb un període orbital excepcionalment curt: només 22,6 hores. La massa del planeta és deu vegades més gran que la massa de Júpiter.

- (a) Calculeu el radi de l'òrbita d'aquest planeta.
- (b) Calculeu l'energia cinètica del planeta en el seu moviment orbital i l'energia mecànica del sistema format per l'estrella i el planeta.

Dades: $M(\text{Júpiter}) = 1,90 \cdot 10^{27}$ kg; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Solució: $3,10 \cdot 10^6$ km
Solució: $5,44 \cdot 10^{38}$ J; $-5,44 \cdot 10^{38}$ J

Qüestions selectivitat

- 47 Ceres es el planeta nan més petit del Sistema Solar i durant molts anys va ser considerat un asteroide, ja que està situat en el cinturó que hi ha entre Mart i Júpiter. Ceres té un període orbital al voltant del Sol de 4,60 anys, amb una massa de $9,43 \cdot 10^{20}$ kg i un radi de 477 km. Calculeu:

- (a) Quin és el valor de la intensitat de camp gravitatori que Ceres crea a la seva superfície? Quina és la velocitat i l'energia mecànica mínima d'una nau espacial que, sortint de la superfície, escapés totalment de l'atracció gravitatòria del planeta?
- (b) La distància mitjana entre Ceres i el Sol, tenint en compte que la distància mitjana entre la Terra i el Sol mesura $1,50 \cdot 10^{11}$ m i que el període orbital de la Terra al voltant del Sol és d'un any.

Dada: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Solució: $2,76 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; 0 J; $514 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Solució: $4,15 \cdot 10^{11} \text{ m}$

- 48 El sistema de navegació europeu Galileu estarà format per trenta satèl·lits distribuïts en tres plans orbitals a $2,36 \cdot 10^4$ km d'altura sobre la Terra, i cada un d'ells descriurà una òrbita circular. Calculeu:

- (a) Quin període de rotació tindran aquests satèl·lits?
- (b) Quina serà la velocitat orbital dels satèl·lits?

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $R(\text{Terra}) = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$; $M(\text{Terra}) = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Solució: 14,4 h
Solució: $3,65 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

- 49 L'any 1969, el mòdul de comandament Columbia, de la missió Apollo 11, tripulada per l'astronauta Michael Collins, orbitava a 100 km d'altura sobre la superfície de la Lluna amb un període de 118 minuts. Mentrestant, Neil Armstrong i Edwin Aldrin, els altres dos tripulants, caminaven sobre la Lluna. Calculeu:

- (a) La massa de la Lluna i la intensitat del camp gravitatori a la superfície lunar.
- (b) La velocitat d'escapament des de la superfície lunar.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ $R_{\text{Lluna}} = 1,74 \cdot 10^3 \text{ km}$

Solució: $7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $1,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Solució: $2,38 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

- 50 El Meteosat és un satèl·lit meteorològic llançat per l'Agència Espacial Europea (ESA) que proporciona informació meteorològica d'Àfrica i Europa. Com que l'objectiu del Meteosat és oferir imatges d'una mateixa zona del planeta, el satèl·lit segueix una òrbita geostacionària: gira en el pla equatorial a la mateixa velocitat angular que la Terra.

- (a) A quina distància de la superfície terrestre es troba el Meteosat? Quina és l'energia cinètica del Meteosat?
- (b) Quina energia mínima caldria proporcionar-li perquè s'allunyés indefinidament de la Terra?

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ $R_{\text{Terra}} = 6.370 \text{ km}$ $M_{\text{Terra}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ $m_{\text{Meteosat}} = 2,00 \cdot 10^3 \text{ kg}$

Solució: $3,59 \cdot 10^4 \text{ km}$; $9,42 \cdot 10^9 \text{ J}$
Solució: $9,42 \cdot 10^9 \text{ J}$



Figura 18. Mòdul d'allunatge de l'Apollo 11

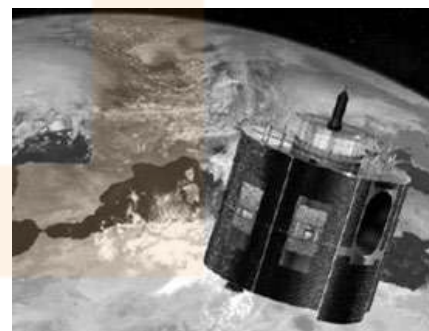


Figura 19. Imatge del Meteosat orbitant amb Europa al fons

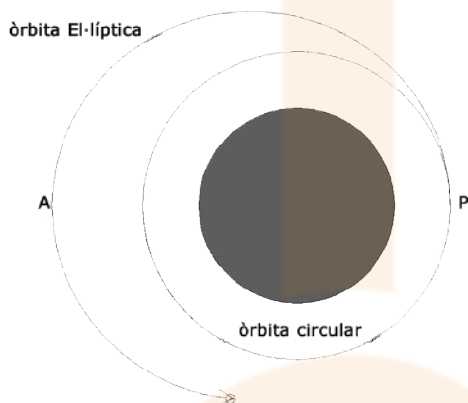


Figura 20. Imatge de la Qüestió 52



Figura 21. Imatge de Galatea vist per la sonda Voyager 2

Qüestions selectivitat

51 Un meteorit, de 400 kg de massa, cau sobre la Lluna amb una trajectòria perpendicular a la superfície d'aquest satèl·lit. Quan es troba a 10.000 km de la superfície lunar, la velocitat del meteorit és de 15.000 km/h.

- Determineu el valor de la velocitat amb què el meteorit arriba a la superfície de la Lluna.
- Calculeu l'energia mecànica que té el meteorit a 10 000 km de la Lluna i la que té un cos de la mateixa massa situat en una òrbita a aquesta mateixa altura sobre la superfície de la Lluna. Indiqueu quina de les dues energies mecàniques és més gran.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{Lluna}} = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $R_{\text{Lluna}} = 1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$

Solució: $4,71 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Solució: $3,31 \cdot 10^9 \text{ J}$; $-8,35 \cdot 10^7 \text{ J}$

52 Un satèl·lit de 2.000 kg de massa gira en una òrbita circular a una altura de 3.630 km sobre la superfície de la Terra.

- Calculeu el període d'aquesta òrbita circular i la velocitat del satèl·lit.
- En passar pel punt P, el satèl·lit augmenta la velocitat fins a $7,00 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ i passa a descriure una òrbita el·líptica amb una altura màxima (apogeu) en el punt A de 9.530 km. Calculeu l'energia cinètica, l'energia potencial gravitatòria i l'energia mecànica total en els punts P i A en la nova òrbita el·líptica.

Dades: $M_{\text{Terra}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $R_{\text{Terra}} = 6.370 \text{ km}$

Solució: $9,96 \cdot 10^3 \text{ s}$; $6,31 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Solució: $4,9 \cdot 10^{10} \text{ J}$; $-7,96 \cdot 10^{10} \text{ J}$; $-3,06 \cdot 10^{10} \text{ J}$
Solució: $1,95 \cdot 10^{10} \text{ J}$; $5,01 \cdot 10^{10} \text{ J}$; $-3,06 \cdot 10^{10} \text{ J}$

53 Galatea és el quart satèl·lit de Neptú més allunyat del planeta. Va ser descobert per la sonda espacial Voyager 2 l'any 1989. Suposem que l'òrbita que descriu és circular.

- Calculeu la velocitat lineal orbital de Galatea en el sistema de referència centrat en Neptú i calculeu la massa de Neptú.
- Calculeu el valor de la intensitat de camp gravitatori que Neptú crea a la seva pròpia superfície.

Dades: Període de l'òrbita de Galatea, $T_{\text{Galatea}} = 0,428 \text{ dies}$; Radi de l'òrbita de Galatea, $R_{\text{Galatea}} = 6,20 \cdot 10^4 \text{ km}$; Radi de Neptú, $R_{\text{Neptú}} = 2,46 \cdot 10^4 \text{ km}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Solució: $1,05 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $1,02 \cdot 10^{26} \text{ kg}$
Solució: $11,2 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$

Qüestions selectivitat

54 L'Estació Espacial Internacional es mou en una òrbita pràcticament circular al voltant de la Terra a 385 km d'altura sobre la superfície terrestre. Des de la superfície terrestre som capaços de veure l'estació orbital.

- Quina és la velocitat lineal orbital de l'estació i quin és el temps que s'ha d'esperar entre dues visualitzacions consecutives?
- Des de l'estació espacial es vol llançar un coet que escapi de l'atracció terrestre. Considerant negligible la massa de l'estació, quina velocitat addicional hem de donar al coet en el moment del llançament?

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Terra}} = 6.370 \text{ km}$

Nota: Considereu negligible el moviment de rotació de la Terra.

Solució: $7,68 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; 92,2 min
Solució: $3,18 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

55 L'Sputnik 1 va ser el primer satèl·lit artificial de la història. Consistia en una esfera d'alumini de 58 cm de diàmetre, que allotjava dins seu l'instrumental científic i de transmissions i amb quatre antenes longitudinals adossades a la part exterior. Tenia una massa de 83,6 kg i el seu període orbital era de 96,2 minuts. Actualment, hi ha rèpliques del satèl·lit en diversos museus del món, com la que es mostra en la Figura 23.

- Expliqueu raonadament si l'Sputnik 1 pot ser considerat un satèl·lit geostacionari. Suposant que l'òrbita hagués estat circular, calculeu-ne l'altura sobre la superfície de la Terra.
- L'Sputnik 1 va ser llançat a prop de Baikonur, ciutat del Kazakhstan que es troba a uns $45,5^\circ$ de latitud nord. A aquesta latitud, els objectes en repòs sobre la superfície de la Terra van a una velocitat d'uns 325 m/s a causa de la rotació del planeta. Calculeu l'energia que va caldre subministrar a l'Sputnik 1 per a situar-lo en la seva òrbita circular.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{Terra}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R_{\text{Terra}} = 6370 \text{ km}$

Solució: No
Solució: $2,83 \cdot 10^9 \text{ J}$

56

- Demostreu, a partir del principi de conservació de l'energia mecànica, que la velocitat d'escapament des d'un punt pròxim a la superfície d'un astre esfèric de massa M i radi R és

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

- Un objecte es llança verticalment des de la superfície de la Lluna amb una velocitat igual a la meitat de la velocitat d'escapament de la Lluna. Calculeu a quina altura màxima arribarà abans de tornar a caure.

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; $M_{\text{Lluna}} = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$; $R_{\text{Lluna}} = 1737 \text{ km}$

Solució: 579 km

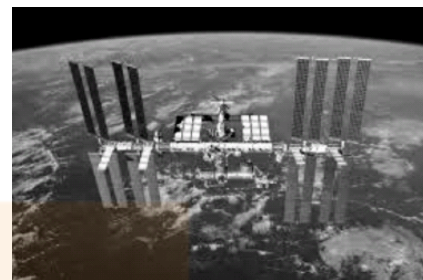


Figura 22. Imatge de l'Estació Espacial Internacional

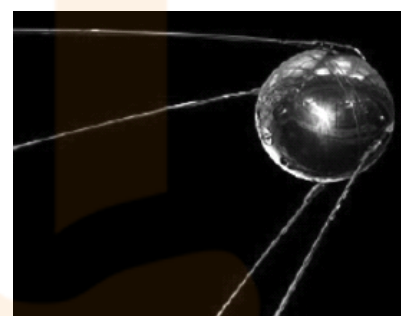


Figura 23. Imatge de l'Sputnik 1

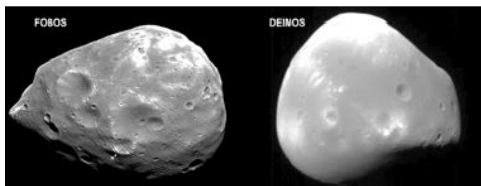


Figura 24. Imatges de Fobos i Deimos

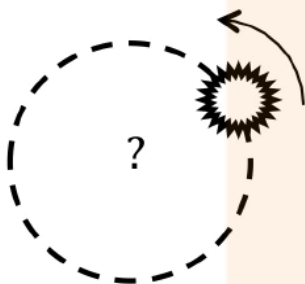


Figura 25. Imatge de la Qüestió 58



Figura 26. Imatge de la Qüestió 59



Figura 27. Imatge de la Qüestió 60

Qüestions selectivitat

57 El 1877, l'astrònom Asaph Hall va descobrir els satèl·lits del planeta Mart: Fobos i Deimos. El dia 6 d'agost de 2012, el robot Curiosity va arribar al planeta Mart i des de llavors envia informació a la Terra sobre les característiques d'aquest planeta. A partir de les dades subministrades, calculeu:

- La massa del planeta Mart.
- El radi de l'òrbita de Deimos i la velocitat d'escapament del robot Curiosity des de la superfície del planeta.

Dades: Radi de Mart, $R_{\text{Mart}} = 3390 \text{ km}$; Acceleració de la gravetat en la superfície de Mart; $g_{\text{Mart}} = 3,71 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; Període orbital de Deimos, $T_{\text{Deimos}} = 30,35 \text{ h}$ Massa de Deimos, $m_{\text{Deimos}} = 2\cdot 10^{15} \text{ kg}$
 $G = 6,67\cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2 \text{ kg}^{-2}$

Solució: $6,39\cdot 10^{23} \text{ kg}$

Solució: 23479 km ; $5015 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

58 Un dels candidats a forat negre més pròxims a la Terra és A0620-00, que està situat a uns 3 500 anys llum. Es calcula que la massa d'aquest forat negre és de $2,2\cdot 10^{31} \text{ kg}$. Encara que A0620-00 no és visible, s'ha detectat una estrella que descriu cercles amb un període orbital de 0,33 dies al voltant d'un lloc on no es detecta cap altre astre.

- Deduïu la fórmula per a obtenir el radi d'una òrbita circular a partir de les magnituds proporcionades. Utilitzeu aquesta fórmula per a calcular el radi de l'òrbita de l'estrella que es mou al voltant d'A0620-00.
- Calculeu la velocitat lineal i l'acceleració centrípeta de l'estrella i representeu els dos vectors v i a_c sobre una figura similar a la d'aquest problema.

Dada: $G = 6,67\cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2 \text{ kg}^{-2}$

Solució: $3,11\cdot 10^9 \text{ m}$

Solució: $6,85\cdot 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $151 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

59 La massa de Saturn crea un camp gravitatori al seu voltant. Un dels seus satèl·lits, Mimas, té una massa de $3,80\cdot 10^{19} \text{ kg}$ i descriu una òrbita pràcticament circular al voltant del planeta.

- Si el període de Mimas al voltant de Saturn és de 22 h 37 min i 5 s, a quina altura per sobre de la superfície de Saturn orbita Mimas? A quina velocitat?
- Quina és l'energia mecànica de Mimas? Què significa el signe del resultat?

Dades: $G = 6,67\cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2 \text{ kg}^{-2}$. $R_{\text{Saturn}} = 5,73\cdot 10^7 \text{ m}$. $M_{\text{Saturn}} = 5,69\cdot 10^{26} \text{ kg}$

Solució: $1,28\cdot 10^{10} \text{ m}$; $1,43\cdot 10^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Solució: $-3,90\cdot 10^{27} \text{ J}$; òrbita estable

60 Un aventurer desitja de batre definitivament el rècord del món de caiguda lliure planeja deixar-se caure, partint d'un estat de repòs, des d'una altura de 330,0 km i no obrir el paracaigudes fins als 50,0 km d'altura. Calculeu:

- L'acceleració de la gravetat quan comença el salt i quan obre el paracaigudes.
- La velocitat que portarà quan sigui a 80,0 km d'altura (considereu negligible la resistència de l'aire).

Dades: $G = 6,67\cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2 \text{ kg}^{-2}$. $M_{\text{Terra}} = 5,97\cdot 10^{24} \text{ kg}$. $R_{\text{Terra}} = 6.370 \text{ km}$

Solució: $8,87 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $9,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Solució: $2,15\cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Qüestions Selectivitat

- 61** El 6 d'agost de 2012, el robot Curiosity va ser dipositat damunt la superfície de Mart per una càpsula d'entrada atmosfèrica ideada pel Mars Science Laboratory. Aquesta càpsula va iniciar l'entrada a l'atmosfera a 125 km de la superfície de Mart i a una velocitat de $5.845 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Les tècniques usades en el descens van fer que el vehicle arribés a la superfície marciana a una velocitat de només $0,60 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Tenint en compte que la massa del Curiosity és de 899 kg, calculeu:

- L'increment de l'energia mecànica del vehicle en el descens.
- El mòdul de la intensitat de camp gravitatori que fa Mart en el punt inicial del descens del Curiosity i la força (mòdul, direcció i sentit) que el planeta fa sobre el robot en aquest punt.

Dades: Massa de Mart, $M_{\text{Mart}} = 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$. Radi de Mart, $R_{\text{Mart}} = 3,39 \cdot 10^6 \text{ m}$. $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$.

Solució: $-1,58 \cdot 10^{10} \text{ J}$
Solució: $3,47 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $3,12 \cdot 10^3 \text{ N}$

- 62** El projecte ExoMars és una missió espacial amb la finalitat de buscar vida al planeta Mart. En una primera fase, el 2016, constava d'un satèl·lit, l'ExoMars Trace Gas Orbiter, en òrbita circular al voltant de Mart a 400 km d'altura, i d'un mòdul de descens, l'Schiaparelli, que havia d'aterrar a Mart. Però quan el mòdul de descens estava a 3,7 km d'altura sobre Mart, pràcticament aturat, els sistemes automàtics van interpretar erròniament que ja havia arribat a la superfície. Van aturar els retrocoets i el mòdul es va desprendre del paracaigudes. Com a resultat, l'Schiaparelli es va precipitar en caiguda lliure.

- Calculeu el període de l'ExoMars Trace Gas Orbiter.
- Determineu el valor de l'acceleració de la gravetat a la superfície de Mart i la velocitat a la qual la nau va impactar a la superfície. (Considereu que la gravetat és constant durant la caiguda i la fricció amb l'atmosfera de Mart és negligible.)

Dades: Massa de Mart = $6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$. Radi de Mart = $3,38 \cdot 10^6 \text{ m}$. $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$.

Solució: $7,062 \cdot 10^3 \text{ s}$
Solució: $3,75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $166,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

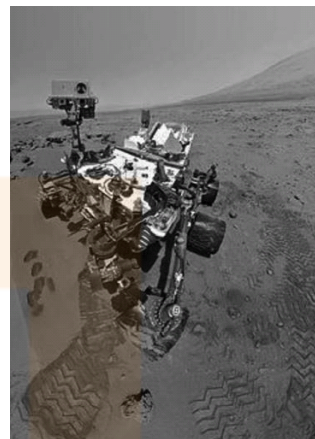


Figura 28. Imatge de la Qüestió 61.
 Imatge del Curiosity al cràter Gale, a la superfície de Mart (31 d'octubre de 2012)

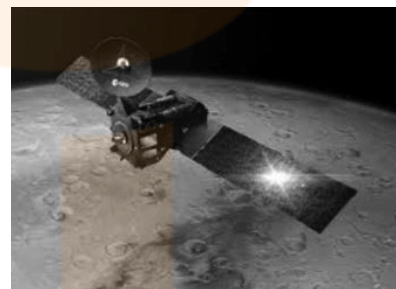


Figura 29. Imatge de la Qüestió 62.

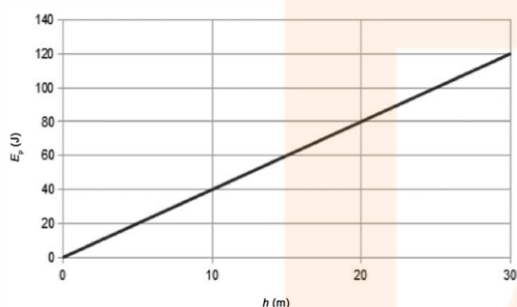


Figura 30. Imatge de la Qüestió 64.

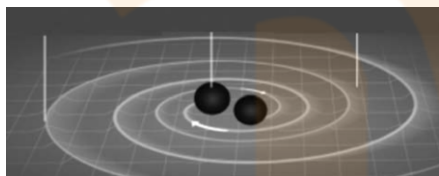


Figura 31. Imatge de la Qüestió 65.

Qüestions Selectivitat

63 A finals de l'any 1933, a la Universitat de Stanford (EUA), Fritz Zwicky i Walter Baade van proposar per primera vegada l'existència de les estrelles de neutrons. Aquestes estrelles, formades només per neutrons, es poden originar després de l'explosió d'una supernova. Els neutrons que les formen són el resultat de la fusió de protons i electrons, provocada per la compressió que exerceix el camp gravitatori d'aquestes estrelles. Per a una estrella de neutrons determinada que té una massa de $2,9 \cdot 10^{30}$ kg i un radi de 10 km, calculeu:

- El mòdul de la intensitat de camp gravitatori que l'estrella de neutrons crea a la seva pròpia superfície.
- La velocitat mínima que hem de donar a un coet en el moment del llançament des de la superfície de l'estrella perquè es pugui escapar de l'atracció d'aquesta (ignoreu els possibles efectes relativistes). Demostreu l'expressió utilitzada per a fer el càlcul i feu esment del principi de conservació en què us baseu.

Dada: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Solució: $1,93 \cdot 10^{12} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$
Solució: $1,97 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

64 La gràfica de la Figura 30 mostra la variació de l'energia potencial en funció de l'altura d'un cos de 2,00 kg de massa a la superfície d'un planeta amb un radi de 5.000 km.

- Calculeu l'acceleració de la gravetat a la superfície del planeta i la massa d'aquest.
- Deduïu l'expressió de la velocitat d'escapament a partir del principi de conservació de l'energia i calculeu-la.

Dada: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Solució: $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $7,50 \cdot 10^{23} \text{ kg}$
Solució: $4,47 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

65 Una vegada més, Einstein tenia raó. Cent anys després d'haver predit l'existència d'ones gravitatòries en la seva teoria general de la relativitat, han estat detectades, i aquesta detecció ha comportat la concessió del Premi Nobel de Física de l'any 2017. Les ones gravitatòries detectades van ser originades per la col·lisió de dos forats negres. Igual que les ones gravitatòries, els forats negres també van ser descrits per la teoria general de la relativitat. Les idees bàsiques relatives als forats negres es poden entendre amb les lleis de Newton.

- L'any 1783, noranta-sis anys abans del naixement d'Einstein, l'astrònom John Michell (1724-1793) va publicar que un cos esfèric que tingués la mateixa densitat que el Sol i 500 vegades el radi d'aquest tindria una velocitat d'escapament, des de la seva superfície, superior a la velocitat de la llum. Calculeu la massa del cos i aquesta velocitat d'escapament.
- Calculeu el mòdul de la intensitat del camp gravitatori que el cos de l'apartat anterior crea a la seva pròpia superfície. Quina força (mòdul, direcció i sentit) fa el cos sobre 1 kg situat a la seva superfície?

Dades: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$; Massa del Sol, $M_s = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; Radi del Sol, $R_s = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$.

Solució: $2,49 \cdot 10^{38} \text{ kg}$; $3,09 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Solució: $1,37 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$; $1,37 \cdot 10^4 \text{ N}$