LL5_Problemes d'optimització

Sitio:	Cursos IOC - Batxillerat	Imprimido por:	Invitado
Curso:	Matemàtiques aplicades a les Ciències socials (autoformació IOC)	Día:	viernes, 11 de febrero de 2022, 21:18
Libro:	LL5_Problemes d'optimització		

Descripción

Bàsicament podem distingir dos tipus de problemes d'optimització.

- Problemes d'optimització amb una variable.

Són els corresponents al primer qüestionari d'aquest lliurament 5

Són els més freqüents en aquest bloc i sovint surten als exàmens de selectivitat.

- Problemes d'optimització amb dues variables.

En general són més complicats que els d'una variable ja que és més laboriós obtenir la funció a optimitzar. Farem algun exemple senzill ja que en aquest bloc ens centrem més en els d'una variable.

Tabla de contenidos

Problemes optimització funció 1 variable

Són els més freqüents en aquest bloc i sovint surten als exàmens de selectivitat. Corresponen al primer qüestionari d'aquest lliurament 5

En general en aquest problemes d'optimització amb una variable els passos a seguir són:

a) Obtenir l'expressió de la funció a optimitzar (maximitzar o minimitzar) F(x)

b) Calcular la derivada de la funció F'(x)

c) Igualar a zero la derivada per tal d'obtenir l'extrem F'(x)=0

d) Possible anàlisis del resultat

Aquesta és la base d'aquest exercicis, desprès potser que us demanin o s'hagi de fer algun pas més depenent del problema concret. La dificultat pot ser en el primer pas d'obtenir la funció a optimitzar o analitzar el resultat final.

Exemple 1

Exemple

Unes proves de selectivitat s'han valorat amb notes entre 0 i 10. El nombre de persones que han rebut una determinada qualificació x ha vingut donada per la fórmula

$$\mathbf{N(x) = 250 - (2x - 9)^2}$$

Quina és la nota que han tret més persones?

a) Funció a optimitzar:

$N(x) = 250 - (2x - 9)^2$

En aquest cas ja ens han donat directament la funció a optimitzar.

En alguns problemes haurem de fer algun pas previ per obtenir aquesta funció.

b) Derivem la funció

$N'(x) = 0 - 2 \cdot (2x - 9) \cdot 2 = -4(2x - 9)$

c) Igualem a zero la derivada

$$-4(2x-9)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-9=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=9 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{9}{2}=\mathbf{4,5}$$

d) Anàlisis dels resultats

Generalment això no ho farem però depenent del problema i del resultat pot ser interessant (i fins i tot necessari)

Bàsicament ens referim a dues actuacions:

- Comprovar que aquest extrems que ens surt d'igualar a zero la derivada, és efectivament, un màxim (que és el que ens demanen). Ho podríem confirmar fent la derivada segona:

$N''(x) = -4 \cdot 2 = -8$
$N''(4,5) = -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4,5 \; màxim$

- Si, per exemple, el resulta ha de ser enter i ens dóna decimal, hauríem de decidir quin dels dos enters més pròxims al resultat és la solució del problema.

Per exemple, en aquest problema suposem que ens demanen que el resultat ha de ser una nota entera. Quina agafem 4 o 5?

$N(4) = 250 - (2 \cdot 4 - 9)^2 = 250 - (-1)^2 = 250 - 1 = 249$
$N(5) = 250 - (2 \cdot 5 - 9)^2 = 250 - 1^2 = 250 - 1 = 249$

En aquest cas coincideix que hi ha tantes persones que obtenen nota 4 con mota 5, per tant hi hauria aquestes dues solucions.

Exemple 2

El nombre d'unitats d'un article fabricades cada mes, x, influeix en el preu en euros de cada unitat segons la funció:

$$P(x) = 580 - \frac{x^2}{16000}$$

Sabent que la fabricació té unes despeses fixes de 250000 euros i unes despeses variables de 125 euros per cada unitat produïda:

a) Trobeu la fórmula de la funció B(x) que expressa el benefici obtingut per la venda de x unitats (ingressos obtinguts menys despeses totals)

Obtenim els ingressos, I(x), multiplicant el nombre d'unitats pel seu preu, x.

$$I(x) = x \cdot \left(580 - \frac{x^2}{16000}\right) = 580x - \frac{x^3}{16000}$$

Les despeses són:

$$D(x) = 250000 + 125x$$

La funció benefici és:

$$B(x) = I(x) - D(x) = 580x - \frac{x^3}{16000} - 250000 - 125x$$

$$\boxed{B(x) = 455x - \frac{x^3}{16000} - 250000}$$

b) Calculeu quantes unitats cal fabricar per obtenir el màxim benefici.

Per obtenir el màxim d'aquesta funció, fem la derivada i la igualem a zero:

$$B'(x) = 455 - \frac{3x^2}{16000} = 0$$

$$\frac{3x^2}{16000} = 455 \Rightarrow x^2 = \frac{455 \cdot 16000}{3} \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{455 \cdot 16000}{3}} = \pm 1557{,}78$$

$$\boxed{x = 1558}$$

Observació: l'equació B'(x)=0 té dues solucions: ±1557,78 però agafem només la positiva ja que ha de ser un nombre natural i hem d'agafar el nombre enter més pròxim a 1557,78 que ens doni benefici màxim. Si calculem B(1558) i B(1557) veiem que B(1558)>B(1557). Per tan, la solució és **1558 unitats.**

I podem comprovar que, efectivament, és un màxim:

$$B''(x) = -\frac{6x}{16000}$$

$$B''(1558) < 0 \Rightarrow \text{és màxim}$$

Altres Exemples

Si necessiteu més exemples podeu mirar aquests:

www.matematicaaplicada2.es

Problemes optimització funció 2 variables

En general en aquest problemes d'optimització amb dues variables els passos a seguir són:

a) Expressar la funció amb dues variables a optimitzar F(x,y)

b) Trobar la relació que existeix entre les dues variables i que ens permet expressar una variable en funció de l'altre.

c) Substituir aquesta variable (expressada en funció de l'altre) en la funció a optimitzar de manera que aquesta ja serà funció d'una sola variable.

d) Igualar a zero la derivada.

Exemple

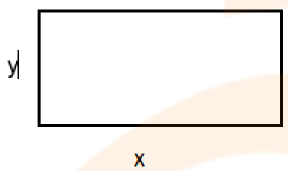
Volem tancar un camp rectangular que és al costat d'un camí. La tanca del costat del camí costa 5€/m i la dels altres tres costats, 3€/m. Calcula l'àrea del camp de màxima superfície que podem tancar amb 1600€

Seguim els passos:

a) Expressar la funció amb dues variables a optimitzar A(x,y)

Volem trobar un màxim de l'àrea.

Si els costats del camp són x, y, la funció a optimitzar és:



$$A(x,y) = x \cdot y$$

b) Trobar la relació que existeix entre les dues variables

Si, suposem que el costat del camí és x tenim:

$$5x + 3x + 3y + 3y = 1600$$

$$8x + 6y = 1600 \quad \rightarrow \quad 4x + 3y = 800$$

Ara expressem una variable, per exemple la y, en funció de la x:

$$4x + 3y = 800 \quad \Rightarrow \quad 3y = 800 - 4x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{800 - 4x}{3}$$

c) Substituïm aquesta variable en la funció A(x,y)

$$A(x,y) = x \cdot y = x \cdot \frac{800 - 4x}{3}$$

D'aquesta manera la funció a optimitzar ja ens queda d'una variable.

$$A(x) = \frac{800x - 4x^2}{3}$$

d) Igualar a zero la derivada.

$$A'(x) = \frac{800 - 2 \cdot 4x}{3}$$

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{800 - 8x}{3} = 0 \quad \Rightarrow 800 - 8x = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{800}{8} = 100$$

$$x = 100 \ m^2$$

Calculem el valor de y:

$$y = \frac{800-4x}{3} = \frac{800-4\cdot 100}{3} = \frac{400}{3} = 133{,}33$$

$$y = 133{,}33\ m$$

$$A = x\cdot y = 100\cdot 133{,}33 = 13333$$

$$\boxed{A = 13333\ m^2}$$

Podríem comprovar que efectivament hem obtingut un màxim:

$$A'(x) = \frac{800-8x}{3} \quad \rightarrow \quad A''(x) = -\frac{8}{3}$$

$$A''(100) < 0 \quad \Rightarrow \quad en\ x = 100 \text{ hi ha màxim}$$