RECEPTES PER A SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS DE COEFICIENTS REALS

Una equació lineal amb *n* incògnites, $x_1, x_2, \dots, x_n$, és una equació de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

Els nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ s'anomenen *coeficients*, i el nombre *b*, *terme independent*. Cada solució constarà de *n* nombres; cada solució serà, doncs, un vector $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Noteu que l'equació es pot indicar mitjançant un producte matricial de la següent manera:

$$(a_1 \ \ a_2 \ \dots \ a_n)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

Més breument, si anomenem *A* a la matriu de coeficients, *X* a la d'incògnites, i *B* a la del terme independent, ens quedarà

$$A\cdot X = B \qquad (2)$$

Quan parlem d'un sistema de *m* equacions lineals, tindrem *m* equacions de la forma (1) i, per tant, quedarà representat en la forma (2), amb la única diferència de què les matrius *A* i *B* tindran *m* files (una per a cada equació del sistema).

Pel que fa a les solucions, si un sistema té algun vector solució, s'anomena *compatible* i, si no en té cap, s'anomena *incompatible*. Si només existeix un vector solució, el sistema s'anomena *determinat* i, si té més d'una solució, s'anomena *indeterminat*. El teorema fonamental per estudiar les solucions d'un sistema d'equacions lineals és el de *Rouché Frobenius*

Teorema de Rouché-Frobenius

a) Un sistema d'equacions lineals és compatible si, i només si, el rang de la matriu A es igual que el rang de la matriu $A' = (A|B)$ (aquesta matriu, obtinguda afegint a *A* la columna *B*, s'anomena *matriu ampliada*).

b) En el cas que el sistema sigui compatible, si el rang de les dues matrius val *r*, n'hi ha dues possibilitats:

   a. El nombre d'incògnites és també igual a *r*. Aleshores, el sistema és *determinat*

   b. El nombre d'incògnites és més gran que *r*. Aleshores, el sistema és *indeterminat*, i té infinites solucions.

En general, tractarem només de sistemes amb 3 equacions.

Exemple 1

Un sistema de 3 equacions amb 3 incògnites és de la forma

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1 \\ a_4x_1 + a_5x_2 + a_6x_3 = b_2 \\ a_7x_1 + a_8x_2 + a_9x_3 = b_3 \end{array}\right\} \quad \text{Matricialment: } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ breument: } A\cdot X = B$$

Observació 1:
Si la matriu *A* té inversa i la coneixem, o ens resulta fàcil calcular-la, aleshores podem calcular la solució amb la fórmula $X = A^{-1}\cdot B$; el sistema serà, per tant, compatible determinat.

Observació 2 (com resoldre el sistema, en general)

En general, per resoldre el sistema, podeu procedir de la següent manera:

1. En primer lloc, escriure la matriu ampliada

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \mid b_1 \\ a_4 & a_5 & a_6 \mid b_2 \\ a_7 & a_8 & a_9 \mid b_3 \end{pmatrix}$$

2. En segon lloc, esglaonar la matriu A'.
3. Si al final resulta que queden les mateixes files no nul·les en A que en A', el sistema és compatible i, en cas contrari, serà incompatible
4. Si el sistema ha resultat compatible:
   a. Si el nombre de files no nul·les coincideix amb el nombre d'incògnites, aleshores el sistema és ***determinat*** (una sola solució).
   b. Si el nombre de files no nul·les és menor que el nombre d'incògnites, aleshores el sistema és ***indeterminat*** (infinites solucions). En aquest cas, si el nombre de files no nul·les és ***r***, i el d'incògnites és ***r+k***, n'hi ha ***r*** incògnites que es podran aïllar en funció de les altres ***k***, i aquestes ***k*** poden prendre qualsevol valor.

Resoldrem un cas concret, seguint els passos 1 a 4:
$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y+z &=& 1 \\ 2x-y+z &=& 0 \\ 3x-3y+2z &=& 1 \end{array}\right\}$$

Passos 1 i 2:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \mid 1 \\ 2 & -1 & 1 \mid 0 \\ 3 & -3 & 2 \mid 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ fila2-2\cdot fila1 \\ fila2-3\cdot fila1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \mid 1 \\ 0 & 3 & -1 \mid -2 \\ 0 & 3 & -1 \mid -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ fila3-fila2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \mid 1 \\ 0 & 3 & -1 \mid -2 \\ 0 & 0 & 0 \mid 0 \end{pmatrix}$$

Pas 3: *El sistema és compatible*, perquè després d'esglaonar la matriu A', s'observa que té el mateix rang que la matriu *A* (aquest rang és el nombre de files no nul·les, o sigui, *r*=2)

Pas 4: *El sistema és indeterminat* (infinites solucions), perquè *r=2* < 3 (nombre d'incògnites). N'hi ha una incògnita que podem triar com paràmetre al qual puguem donar qualsevol valor, i les altres dues es poden expressar en funció d'aquella. Tal com tenim la matriu ampliada esglaonada, podem agafar com paràmetre la *y* o la *z*, la que més ens convingui.

Agafarem la *y* com paràmetre que podrà tenir qualsevol valor (ho fem perquè, com veureu, ens obliga a fer menys càlculs). Per expressar aleshores les solucions, escrivim el sistema resultant de la matriu esglaonada, però passant la *y* al segon membre:

$$\left.\begin{array}{r} x+z=1+2y \\ -z=-2-3y \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{z=2+3y} \quad \rightarrow x=1+2y-z=1+2y-(2+3y) \rightarrow \boxed{x=-1-y}$$

I així és com queda expressada la solució; si voleu solucions concretes, heu de donar valors a la *y*, i obtenir després els valors de la *x* i de la *z*. Per exemple, si posem *y*=1, obtenim la solució (-2,1,5); si posem *y*=-5, obtenim la solució (4,-5,-13).

Intenteu ara expressar la solució triant com paràmetre la *z* (veureu que obliga a més càlculs)

Determinants

En primer lloc, no oblideu mai que, tot i que *determinants* i *matrius* se simbolitzen d'una manera similar, són conceptes totalment diferents: un *determinant* és un valor numèric associat a una matriu quadrada, mentre que una *matriu* és simplement una forma de distribuir una sèrie de nombres en una taula (o sigui, en files i columnes).

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

Matriu Determinant

Indicarem com es calculen els determinants de matrius quadrades dels ordres 2 i 3.

En poques paraules, el valor d'un determinant d'ordre 2 és "**el producte dels extrems *menys* el producte dels mitjos**". Sabut això, el valor d'un determinant d'ordre 3 el podeu obtenir a partir de determinants d'ordre 2, com a continuació indiquem:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_4 - a_2 \cdot a_3 \qquad \text{Exemple: } \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 7 \cdot (-3) = 8 + 21 = \boxed{29}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix}$$

Relació entre el determinant d'una matriu i el seu rang

- **Si A és una matriu quadrada de tipus $n \times n$ (n columnes i n files), es compleix:**

  Rang(A)=n si, i només si, det(A) $\neq$ 0
- **Si A és una matriu qualsevol (quadrada o no) i en ella podem obtenir un determinant d'ordre k diferent de zero, aleshores rang(A) $\geq$ k (a l'exemple següent veureu com s'ha d'extreure un determinant vàlid)**

Exemple 2

- $rang\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 2, \text{ perquè } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = 7 \neq 0$
- $rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} < 3, \text{ perquè } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 3 = 0$
- $rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 11 & -4 \end{pmatrix} \geq 2, \text{ perquè d'ella surt algun determinant 2x2 diferent de zero}$

  Per exemple, $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 10 \neq 0$

  Noteu com s'han de formar els determinants vàlids: respectant sempre les posicions dels elements en la matriu. Els determinants obtinguts d'aquesta manera s'anomenen *menors* de la matriu. Per tant, si en una matriu podem obtenir algun *menor* d'ordre 2 diferent de 0, aleshores el rang de la matriu és com a mínim 2 (el rang serà exactament 2 només si, després, resulta que tots els *menors* d'ordre 3 són iguals a 0.)

Inversa d'una matriu quadrada

Suposem que ***A*** és una matriu quadrada i que I és la matriu unitat del mateix ordre que ***A*** (és a dir, ***I*** conté només uns en la seva diagonal i zeros en tots els altres llocs).

Si existeix una matriu ***B*** tal que ***A·B = I***, aleshores es diu que ***A*** és *invertible* i que ***B*** és la seva *matriu inversa*. Normalment, la matriu inversa de ***A*** s'indica escrivint A^{-1} (a partir d'aquí, així ho farem).

És molt important que no caiguis en l'error de considerar que totes les matrius quadrades tenen inversa: Es pot demostrar que *només tenen inversa les matrius que tenen determinant diferent zero*! Així doncs,

$$\boxed{A \text{ és una matriu invertible si, i només si, } \det(A) \neq 0}$$

Hi ha diferents mètodes per calcular la matriu A^{-1}, et recordarem el que sol ser més còmode i senzill: el *mètode de Gauss-Jordan*. Esquemàticament, és el següent:

$(A \mid I)$ ...... Si A té inversa, fent transformacions elementals per files es pot transformar en ...... $(I \mid A^{-1})$

Per tant, per calcular l'inversa d'***A***, pots procedir així:

1. Escriure la matriu A i, a la seva dreta, la matriu I: $(A \mid I)$
2. Fer transformacions elementals amb les files de l'esquema fins a aconseguir que la matriu I quedi a l'esquerra: $(I \mid ?)$. (Recordeu que *transformacions elementals* vol dir només: O *bé multiplicar alguna fila per un nombre diferent de 0*, o bé *sumar a una fila una combinació lineal de les altres files*, o bé *canviar l'ordre les files*)
3. Llavors, la matriu que quedi a la dreta serà la inversa d'***A***

Exemple 1: Inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} \color{red}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} \color{red}{2} & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) = (I \mid A^{-1})$$

(1): Jugant amb el 2 (vermell), hem substituït la fila f_2 per $2 \cdot f_2 - 5 \cdot f_1$
(2): Jugant amb el 1 (vermell), hem substituït la fila f_1 per $f_1 - f_2$
(3): Jugant amb el 2 (vermell), hem substituït la fila f_1 per $f_1 /2$. Així, ja hem aconseguit la matriu unitat en la part esquerra.

Per tant, la inversa és $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple 2: Inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 13 \end{pmatrix}$

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{-1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 11 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 21 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \underset{\text{seguiu i obtindreu}}{\text{.............}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -21 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

(1): Jugant amb el -1 (vermell), hem substituït la fila f_2 per $f_2 + 3 \cdot f_1$ i la fila f_3 per $f_3 + 4 \cdot f_1$
(2): Jugant amb el 1 (vermell), substituiríem la fila f_3 per $f_3 - 2 \cdot f_2$
(3): Jugant amb el nombre que surti en la posició 3,3 haureu de convertir en 0 els elements de les files 1 i 2 de la 3a columna
(4): ....

Per tant, la inversa és $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -18 & -21 & 11 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Important! Si heu de resoldre una equació matricial com $A \cdot X = B$, i si sabeu que A té inversa, aleshores la matriu X serà $X = A^{-1} \cdot B$, és a dir, només caldrà calcular la inversa de A i multiplicar-la després per la matriu del segon membre. Però, **compte!** aquesta multiplicació l'heu de fer posant A^{-1} pel mateix costat que estava A (en aquest cas, seria incorrecte posar $X = B \cdot A^{-1}$)

Tècniques per discutir un sistema d'equacions lineals

Primer heu de tenir clar què es vol dir quan es parla de *discutir un sistema*:

"De vegades, un sistema representa en realitat infinits sistemes alhora; per exemple, si ens diuen que el nombre *k* és un paràmetre real, o sigui, que *k* pot ser qualsevol nombre real, aleshores un sistema com el següent representarà alhora infinits sistemes (*família de sistemes*):

$$\left.\begin{array}{r} kx-6y=1 \\ -x+3y=2 \end{array}\right\}$$ Aquest sistema representa infinits sistemes, un per cada valor de *k*

Exemple: Dos possibles sistemes d'aquesta família serien

-Si prenem k=1, $\left.\begin{array}{r} x-6y=1 \\ -x+3y=2 \end{array}\right\}$ Resoleu-lo per comprovar que té solució única.

O sigui, si *k* = 1, el sistema és *compatible determinat*

-Si prenem k=2, $\left.\begin{array}{r} 2x-6y=1 \\ -x+3y=2 \end{array}\right\}$ Resoleu-lo per comprovar que no té cap solució.

O sigui, si *k* = 2, el sistema és *incompatible*

Doncs, bé, si us demanen ***discutir el sistema segons els valors del paràmetre k***, heu de trobar resposta a les següents preguntes:

1. **Per a quins valors de *k* el sistema és incompatible? (o sigui, quin són els sistemes incompatibles de la família?)**
2. **Per a quins valors de *k* el sistema és compatible? (o sigui, quin són els sistemes compatibles de la família?**
   a. **Entre aquests valors de *k* amb els quals resulta un sistema compatible, per a quins resultaria *compatible determinat* ?**
   b. **Entre aquests valors de *k* amb els quals resulta un sistema compatible, per a quins resultaria *compatible indeterminat* ?**

Quan tingueu ben localitzats els valors de *k* que donen resposta a aquestes preguntes, llavors, haureu discutit el sistema "correctament" (llevat de possibles errors de càlcul, naturalment).

N'hi ha dos tipus de sistemes en els quals la discussió es pot organitzar molt metòdicament.

Cas 1:	En el sistema $A\cdot X=B$, la matriu ampliada $A'=(A\mid B)$ és quadrada
	1. Calculeu el $\det(A')$ i els valors de k que compleixen $\det(A')=0$ 2. Si com a resultat s'obtenen, per exemple, dos valors k_1 i k_2, els casos dels valors de *k* per estudiar ja els teniu separats; serien aquests: a) Cas $k=k_1$ b) Cas $k=k_2$ c) Cas $k\neq k_1$ i $k\neq k_2$ 3. **En el cas c), el sistema serà *incompatible***, ja què amb tots aquests valors de *k* el det(A') serà diferent de 0 i, per tant, el rang de la matriu ampliada resultarà màxim, i igual, per tant, al nombre de columnes que tingui. Com que la matriu A té una columna menys, no pot arribar a tenir el mateix rang. En definitiva, rang(A) i rang(A') seran diferents i el sistema serà incompatible 4. Per saber què passa si $k=k_1$, heu de resoldre el sistema que resulti substituint *k*. 5. Anàlogament, per saber com és el sistema si $k=k_2$, heu de substituir *k* per k_2

Cas 2:	En el sistema $A \cdot X = B$, la matriu dels coeficients, A, és quadrada
	1. Calculeu el $\det(A)$ i els valors de k que compleixen $\det(A) = 0$ 2. Si com a resultat s'obtenen, per exemple, dos valors k_1 i k_2, els casos dels valors de k per estudiar ja els teniu separats; serien aquests: a) Cas $k = k_1$ b) Cas $k = k_2$ c) Cas $k \neq k_1$ i $k \neq k_2$ 3. **En el cas c), el sistema serà *compatible i determinat***, ja què amb tots aquests valors de k el det(A) serà diferent de 0 i, per tant, la matriu A tindrà inversa. L'única solució del sistema serà, per tant, aquesta: $X = A^{-1} \cdot B$ (També podeu raonar dient que el rang de la matriu A serà igual al nombre de files que tingui, i com que l'ampliada té les mateixes files, el seu rang coincidirà necessàriament; per tant, el sistema serà compatible) 4. Per saber què passa si $k = k_1$, heu de resoldre el sistema que resulti substituint k. 5. Anàlogament, per saber com és el sistema si $k = k_2$, heu de substituir k per k_2