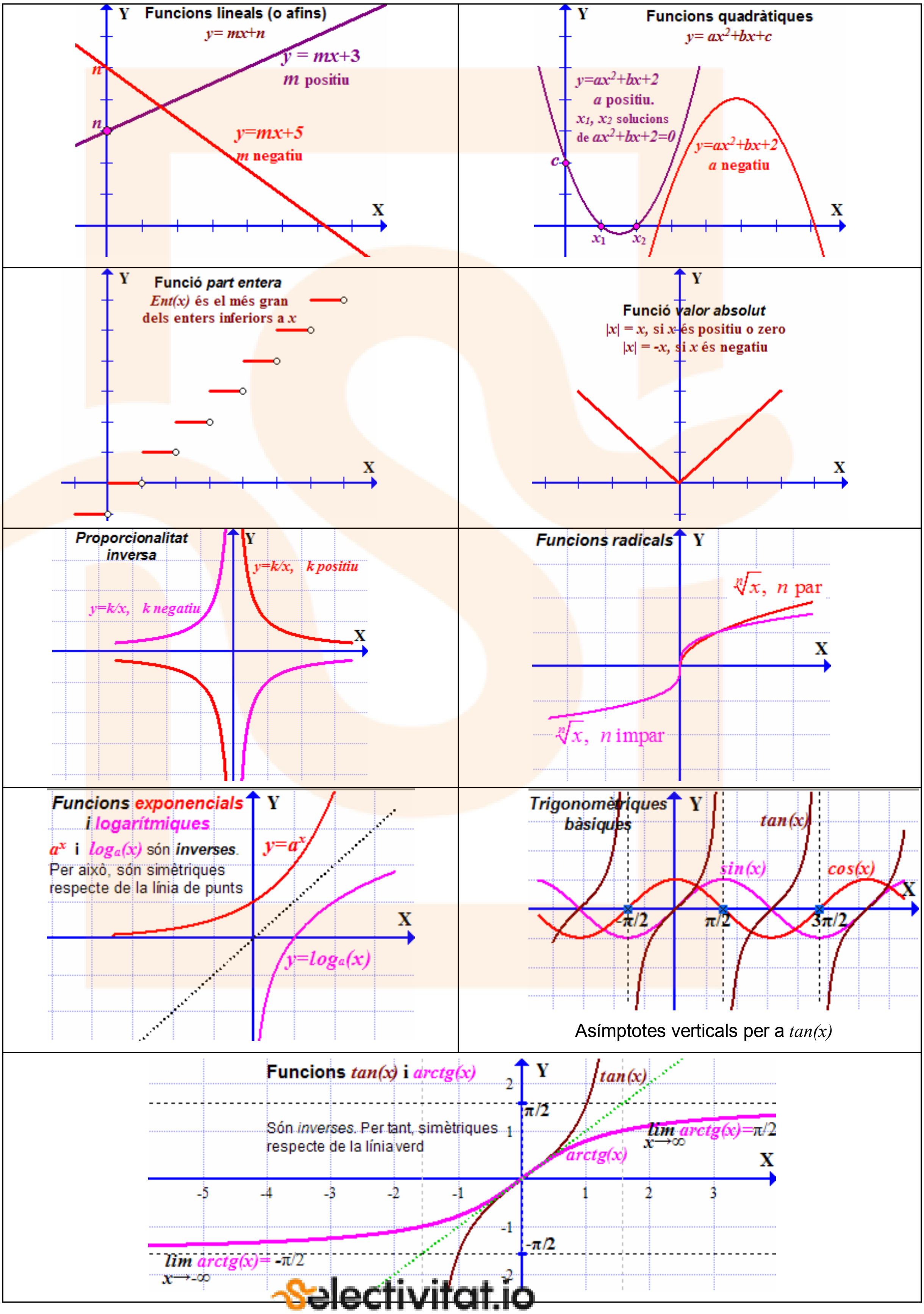
RECEPTES SOBRE ANÀLISI GENERAL DE FUNCIONS

A. Funcions elementals

Hauríeu de conèixer bé les definicions i gràfiques de les funcions que anomenem elementals. Us les detallem a continuació.



Selectivitat.io

B. Expressions simbòliques en el càlcul de límits

Quan es calculen límits, solen aparèixer expressions simbòliques el resultat de les quals hauríeu de conèixer bé (allà on vegeu un ?, heu d'interpretar que és una *expressió indeterminada*, és a dir, el resultat dependrà del problema en el que aparegui; si us apareix en un problema, haureu de fer un estudi més profund per esbrinar quant val) :

SUMES i RESTES			PRODUCTES
$\infty + L = \infty$,	$-\infty + L = -\infty$,	$+\infty + L = +\infty$	Si $L>0$, llavors $\infty \cdot L = \infty$ i $-\infty \cdot L = -\infty$
$\infty + \infty = \infty$,	$(-\infty)+(-\infty) = -\infty$,	$-(-\infty) = +\infty$	Si $L<0$, llavors $\infty \cdot L = -\infty$ i $-\infty \cdot L = +\infty$
$\infty - \infty =$ **?**,	$-\infty - (-\infty) =$ **?**,	$(+\infty)-(+\infty) =$ **?**	$\infty \cdot 0 =$ **?**

QUOCIENTS

Si L és un nombre qualsevol, llavors $\frac{L}{\infty} = 0$

$\frac{\infty}{0} = \infty$ $\frac{L}{0} = \infty$ sempre que $L \neq 0$

$\frac{\infty}{\infty} =$ **?** $\frac{0}{0} =$ **?**

POTÈNCIES

$\infty^{\infty} = \infty$ $\infty^{-\infty} = 0$ $\infty^{0} =$ **?**

Si $L>0$, llavors $\infty^{L} = \infty$. Si $L<0$, llavors $\infty^{L} = 0$

Si $L>1$, llavors $L^{\infty} = \infty$, i $L^{-\infty} = 0$

Si $0 < L < 1$, llavors $L^{\infty} = 0$, i $L^{-\infty} = \infty$

$1^{\infty} =$ **?**

C. Resolució d'expressions d'indeterminació

El més difícil del càlcul de límits és sempre com resoldre una indeterminació quan hi apareix una. Us indicarem els casos més habituals.

C.1 Indeterminacions del tipus $\infty/\infty =$?

Si la indeterminació surt com a quocient de dos fraccions polinòmiques, teniu en compte que $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^n + a'x^{n-1} + \dots}{bx^m + b'x^{m-1} + \dots} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to\infty} x^{n-m}$ **Exemple**: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2+5}{3x^2-x} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{3x^2} = \frac{4}{3} \lim_{x\to\infty} x^{2-2} = \frac{4}{3} \cdot 1$ però fent la resta.	La regla de l'esquerra també val si en el numerador o en el denominador hi ha expressions radicals, és a dir, $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[p]{ax^n + \dots}}{\sqrt[q]{bx^m + \dots}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[p]{ax^n}}{\sqrt[q]{bx^m}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[q]{b}} \lim_{x\to\infty} x^{\frac{n}{p} - \frac{m}{q}}$ En aquest cas, però, heu de tenir en compte que si *a* és negatiu i *p* parell, l'expressió del numerador no tindrà sentit quan *x* sigui gran, per tant el límit no existirà. Anàlogament quan *b* sigui negatiu i *q* parell

En altres casos, no procedents de fraccions polinòmiques, intenteu resoldre la indeterminació aplicant la *regla de l'Hôpital* (més endavant)

C.2 Indeterminacions del tipus $\infty - \infty =$?

Si la indeterminació surt com a diferència de 2 fraccions polinòmiques, feu primer la resta de les fraccions i torneu a calcular el límit: **Exemple**: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right) = \infty - \infty$, però fent la resta: $\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2(x+1) - x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2}{x^2-1}$ Ara, en calcular el límit del resultat, s'obté lím = 2	Si la indeterminació surt com a diferència d'expressions amb alguna arrel quadrada, multipliqueu i dividiu per la seva expressió conjugada, feu-ne operacions i torneu a calcular el límit: $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) = \infty - \infty$, però multiplicant i dividint per $\sqrt{x^2 - x} + x$, podem obtenir el límit $\sqrt{x^2 - x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x}$ Calculant ara el límit, s'obté $\frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$

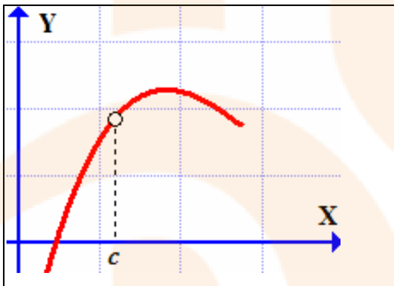
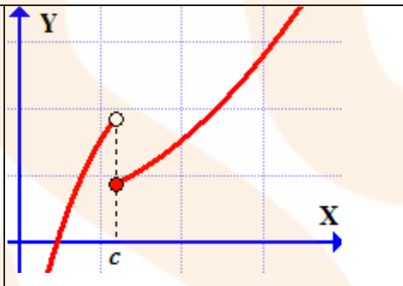
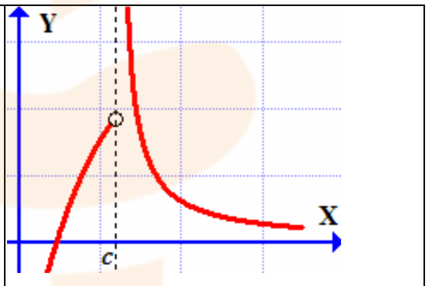
Selectivitat.io

C.3 Indeterminacions del tipus $1^{\infty} = ?$

El nombre *e* Recordeu que el nombre *e* = 2’7182... és el valor dels següents límits: $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ En particular, si *k* indica una constant, i *f(x)* indica una expressió en *x*, es té: $e^{k} = \lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)}$ $= \lim\limits_{x\to 0}(1+k\cdot f(x))^{\frac{1}{f(x)}}$	Las indeterminacions del tipus 1^{∞} se solen resoldre transformant les expressions fins a aconseguir –les de forma que es pugui utilitzar una de les fórmules de l’esquerra. Et donem, però, una regla pràctica: Si $\lim f(x) = 1$ i $\lim g(x) = \infty$, llavors $\boxed{\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim (f(x)-1)\cdot g(x)}}$ **Exemple:** Comproveu que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1} = 1^{\infty}$ i calculeu després el límit aplicant la fórmula anterior.

D. Continuïtat d’una funció en un punt i en un interval

Observeu les 3 gràfiques següents en el punt corresponent a $x=c$. Les 3 tenen en comú una cosa: **No compleixen la igualtat** $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$. Per això, es diu que són discontínues en $x=c$

		
En aquest cas, no existeix *f(c)*, però sí existeix $\lim\limits_{x\to c} f(x)$. Es diu que en *x=c* hi ha *discontinuïtat evitable*	Ara, no existeix $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ tot i que existeixen els límits laterals, però tots dos són diferents. En *x=c* hi ha *discontinuïtat de salt.*	En aquest cas, almenys un dels límits laterals és infinit $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$. Es diu que en *x=c* hi ha *discontinuïtat infinita (o asimptòtica)*

Així doncs,

- es diu que *f* és una ***funció continua*** en $x=c$ si existeix *f(c)* i $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$
- es diu que *f* és una ***funció continua*** en un interval si és continua en cada punt de l’interval.

E. Teoremes fonamentals de funcions contínues en intervals

Teorema de Bolzano	**Teorema de Weierstrass**
Si *f(x)* és l’expressió d’una funció contínua en l’interval *[a,b]*, i els nombres *f(a)* i *f(b)* són de signes diferents, llavors l’equació f(x)=0 té almenys una solució *c* en *[a,b]* Això significa que la gràfica tallarà l’interval [a,b] en almenys un punt	Si *f(x)* és l’expressió d’una funció contínua en l’interval [a,b], aleshores arriba a tenir un valor màxim i un valor mínim. (Aquests valors màxim i mínim es poden obtenir en x=a, en x=b o en un punt de l’interior)

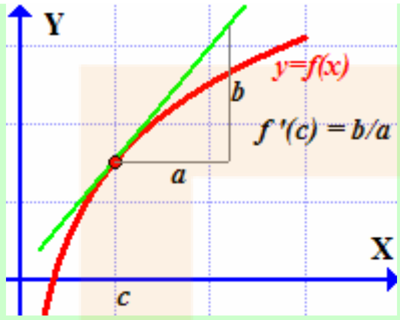
Exemple: l’equació $x^3 - 6x + 1 = 0$ té almenys una solució que cau entre 2 i 3, perquè

- En x=2 obtenim $2^3 - 6\cdot 2+1=-3$ (negatiu)
- En x=3 obtenim $3^3 - 6\cdot 3+1=+10$ (positiu)

Selectivitat.io

F. Derivada d'una funció en un punt

El concepte de *derivada d'una funció en un punt* va completament lligat geomètricament al concepte de *recta tangent* a una gràfica en un punt. No es pot parlar d'un d'ells sense l'altre. També va lligat al concepte de *velocitat instantània*, *acceleracció* i molts altres. És, doncs, importantíssim que l'enteneu bé.



La derivada d'una funció *f* en un punt *x=c* es defineix com el valor del següent límit:

$$\boxed{\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}$$ (se simbolitza amb $f'(c)$)

La recta que passa pel punt (c,f(c)) i té per pendent el nombre f'(c) s'anomena ***tangent*** a la corba.
Així, la *derivada en un punt* i el *pendent de la recta tangent* són el mateix. L'equació de la tangent és

$$y-f(c)=f'(c)\cdot(x-c)$$

No oblideu que *tota funció que tingui derivada en un punt és continua en el punt.*

En canvi, no és cert dit a l'inrevés, és a dir, *existeixen funcions continues que no tenen derivada*; un exemple és la funció *valor absolut* en el punt $x=0$ (és contínua, però no té derivada)

E. Regles de derivació i derivades de les funcions elementals

REGLES DE LA SUMA i LA DIFERÈNCIA

$$(f+g)'=f'+g', \quad (f-g)'=f'-g'$$

REGLA DEL PRODUCTE

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$

Si k és constant, $(k\cdot f)'=k\cdot f'$

REGLA DEL QUOCIENT

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

REGLA DE LA FUNCIÓ COMPOSTA

Si tenim 2 funcions $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$, la derivada de la funció composta $y=f(g(x))$ és el producte de les derivades (cada una en el seu punt), és a dir,

$$(f(g(x)))'=f'(y_2)\cdot g'(x)$$

Derivada d'una constant

Si k és una constant, $k'=0$

Derivada d'una potència

$$D(f(x))^n=n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$$

Derivada d'una exponencial

$$D\left(e^{f(x)}\right)=e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

Derivada del sinus

$$D(\sin f(x))=\\=(\cos f(x))\cdot f'(x)$$

Derivada del cosinus

$$D(\cos f(x))=\\=-(\sin f(x))\cdot f'(x)$$

Derivada de la funció *tan(x)*

$$D(\tan f(x))=\\=\left(1+\tan^2 f(x)\right)\cdot f'(x)$$

Derivada del logaritme

$$D(\ln f(x))=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

Derivada d'una arrel

$$D\left(\sqrt{f(x)}\right)=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$$

Derivada d'una arrel

$$D\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)=\frac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$$

Derivada d'*arcsin*

$$D(\arcsin f(x))=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$

Derivada d'*arccos*

$$D(\arccos f(x))=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$

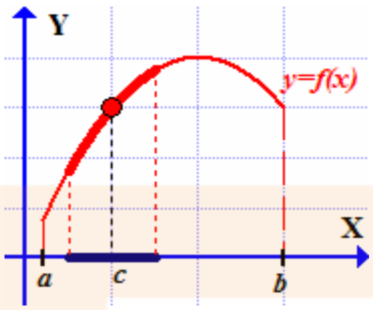
Derivada d'*arctan*

$$D(\arctan f(x))=\frac{f'(x)}{1+\tan^2 f(x)}$$

Selectivitat.io

F. Aplicacions de les derivades: Monotonia, màxims i mínims, concavitat

Creixement en un punt



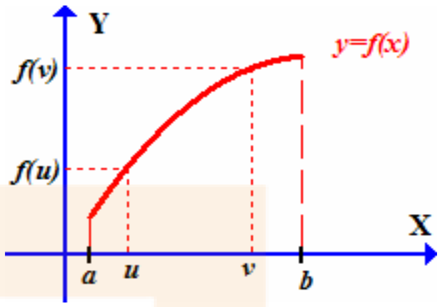
En $x=c$, la funció f és *creixent*, perquè en un entorn de c, amb qualsevol x es compleix:

$f(x)<f(c)$ si $x<c$, i $f(c)<f(x)$ si $c<x$

Però la funció f no és creixent en l'interval $[a,b]$ (la seva gràfica no és sempre ascendent)

Noteu que en un punt de creixement, la tangent té pendent positiva, o sigui, $f\,'(c)>0$.

Creixement en un interval



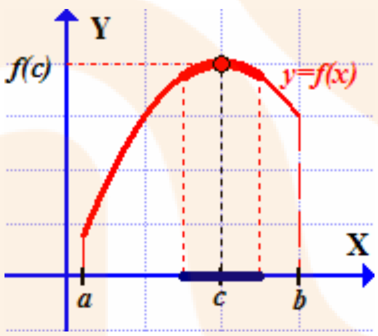
En l'interval $[a,b]$ la funció f és *creixent*, perquè dins de l'nterval es compleix:

$f(u)<f(v)$ sempre que $u<v$

Noteu que llavors la corba és ascendent d'esquerra a dreta.

(Es diu que f és *decreixent* en l'interval $[a,b]$, si $f(u)>f(v)$ quan $u<v$ (corba descendent)

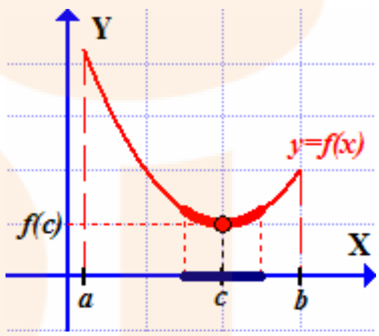
Màxim relatiu



En $x=c$, la funció f té *màxim relatiu,* perquè <u>en un entorn</u> de c el valor més gran és $f(c)$:

$f(x)<f(c)$, tant si $x<c$ com si $c<x$

Mínim relatiu



En $x=c$, la funció f té *màxim relatiu,* perquè <u>en un entorn</u> de c el valor més petit és $f(c)$:

$f(x)>f(c)$, tant si $x<c$ com si $c<x$

Noteu que en un màxim, i en un mínim, en cas que existeixi recta tangent, és una recta horitzontal, o sigui, en cas que existeixi derivada, aquesta ha de valer 0. Més exactament:

Condició <u>necesària</u> per a creixement o decreixement en un punt

- Si f és creixent en un punt $x=c$, només n'hi ha 2 possibilitats:

  - O no existeix la derivada, o la derivada és positiva

Condició <u>necessària</u> per a màxim o mínim relatiu

- Si f té un màxim relatiu, o un mínim, en $x=c$, només n'hi ha 2 possibilitats:

  - O no existeix la derivada, o la derivada val 0

Condició <u>suficient</u> per a màxim o mínim relatiu en $x = c$

- Si $f\,'(c)=0$ i $f\,''(c)>0$, aleshores f té un *mínim relatiu* en $x=c$
- Si $f\,'(c)=0$ i $f\,''(c)<0$, aleshores f té un *màxim relatiu* en $x=c$

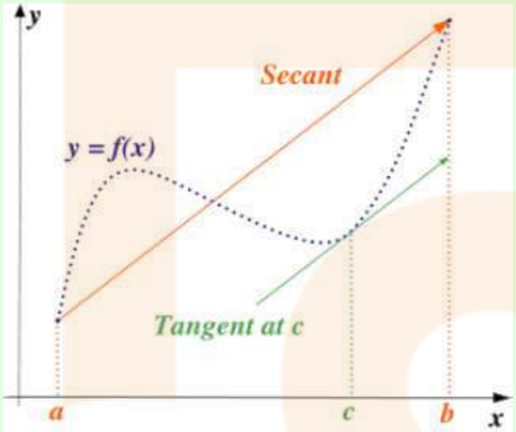
Selectivitat.io

G. Teoremes fonamentals sobre funcions derivables. Monotonia en un interval.

Teorema del valor mitjà

Si f és una funció amb derivada en cada punt d'un interval $[a,b]$, aleshores existeix algun nombre c dins de l'interval tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



El *teorema del valor mitjà* implica que en qualsevol arc de corba que tingui recta tangent en tots els seus punts, sempre n'hi ha almenys un punt en el qual la tangent és paral·lela a la corda.

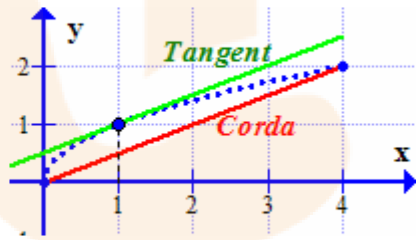
Exemple

Donada la corba d'equació $y=\sqrt{x}$, raonar que en l'interval [0,4] hi ha algun punt en el qual la recta tangent és paral·lela a la recta que uneix els punts A(0,0) i B(4,2). Calcular-lo.

Com que la funció té derivada en tots els punts de l'interval [0,4], i els punts A i B pertanyen a la corba, el *teorema del valor mitjà* garanteix que en algun punt intermig entre 0 i 4 la tangent resultant serà paral·lela a la corda. Per calcular-lo,

$$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{0}}{4-0}=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow\frac{2}{4}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Resolent l'equació, obtenim x = 1.



Creixement i decreixement en un interval segons el signe de la derivada

Entre les moltes conseqüències del *teorema del valor mitjà*, estan les sergüents:

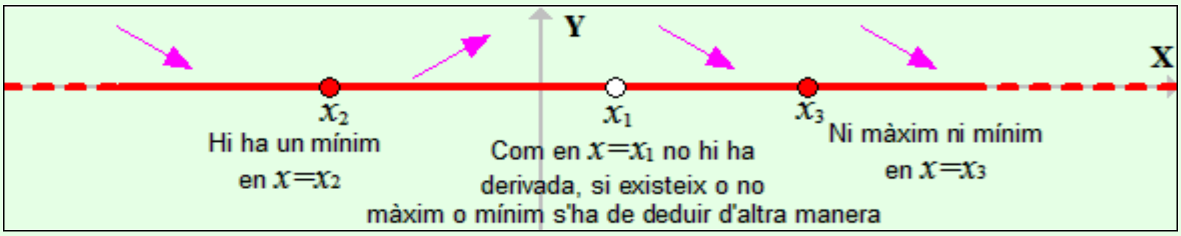
1. Si és compleix $f'(x)>0$ per a cada x d'un interval, la funció f és creixent en l'interval.
2. Si és compleix $f'(x)<0$ per a cada x d'un interval, la funció f és decreixent en l'interval.

D'aquestes dues propietats és d'on resulta un mètode per determinar els intervals en els quals la gràfica d'una funció és ascendent o descendent (intervals anomenats de ***monotonia***)

Mètode per determinar els intervals de monotonia d'un funció *f*

Per obtenir els intervals en què una funció és o bé creixent, o bé decreixent, podeu seguir aquest procediment (l'esquema final s'anomena *esquema de monotonia*):

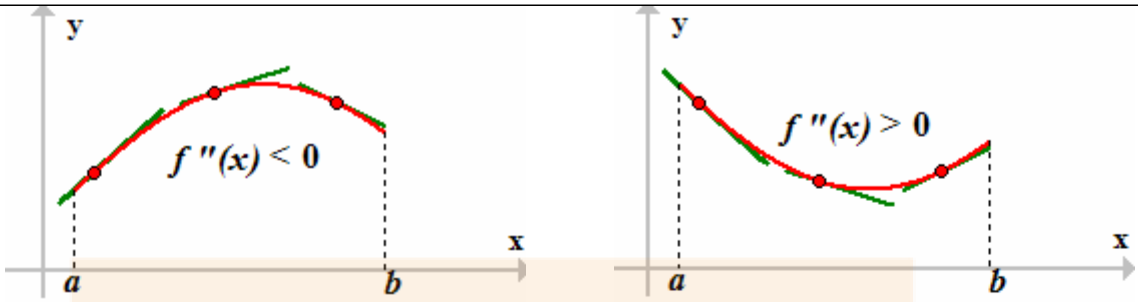
1. Determineu els valors de la x en què no existeixi derivada (no oblideu que entre aquests valors estaran també aquells en què la funció f no sigui continua). Imaginem que surti $x=x_1$
2. Resoleu l'equació $f'(x)=0$. (Imaginem que surtin 2 solucions: $x=x_2$, $x=x_3$)
3. Ordeneu de menor a major el valors anteriors, tots plegats, i tindreu definits una sèrie d'intervals (en aquest cas, 4 intervals). Imaginem que, ordenats, quedin: $x_2<x_1<x_3$



Esquema de monotonia

Selectivitat.io

H. Concavidad i convexitat. Intervals de concavitat i convexitat.



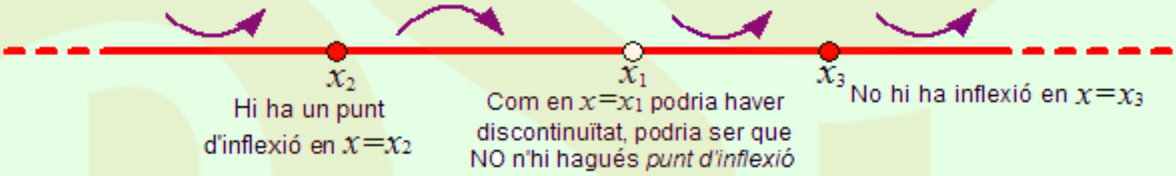
Si la tangent està sempre per sobre de la gràfica, la funció és diu **convexa** en $[a,b]$. La condició és $f''(x)<0$ dins de l'interval

Si la tangent està sempre per sota de la gràfica, la funció és diu **còncava** en $[a,b]$. La condició és $f''(x)>0$ dins de l'interval

Mètode per determinar els intervals de concavitat i convexitat d'un funció *f*

Per obtenir els intervals en què una funció és o bé còncava, o bé convexa, podeu seguir aquest procediment (l'esquema final s'anomena *esquema de concavitats*):

1. Determineu els valors de la x en què no existeixi derivada segona (entre aquests valors s'han de comptar també aquells en què f o f' no siguin continues). Imaginem que surti $x = x_1$
2. Resoleu l'equació $f''(x) = 0$. (Imaginem que surtin 2 solucions: $x = x_2$, $x = x_3$)
3. Ordeneu de menor a major el valors anteriors, tots plegats, i tindreu definits una sèrie d'intervals (en aquest cas, 4 intervals). Imaginem que, ordenats, quedin: $x_2 < x_1 < x_3$



Esquema de concavitats

I. Asímptotes d'una funció

Intuitivament, i en poques paraules, una *asímptota* de la funció f és una recta r amb la qual la gràfica de la funció tendeix a coincidir. És important que sapigueu com obtenir les asímpotes:

Mètode per determinar les asímptotes d'un funció *f*

Asímptotes verticals: Són les rectes, amb equació del tipus $\boxed{x = c}$ tales que

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty, \quad \text{o bé} \quad \lim_{x\to c+} f(x) = \pm\infty, \quad \text{o bé} \quad \lim_{x\to c-} f(x) = \pm\infty$$

Per tant, les obtindreu estudiant la continuïtat de la funció f. Quan es tracti d'una funció racional (quocient de dos polinomis), les obtindreu igualant a 0 el polinomi denominador.

Asímptotes NO verticals: Són les rectes $\boxed{y = mx + n}$ tales que

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx \right) \qquad (\textit{Asímptotes per la dreta}), \text{ o bé}$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx \right) \qquad (\textit{Asímptotes per l'esquerra})$$

És important que tingueu en compte que

- Si f és una funció racional, l'asímptota és la mateixa per l'esquerra que per la dreta.
- Si $f(x)$ conté expressions exponencials (a^x), heu de comprovar asímptota esquerra i dreta
- Si f és una funció peròdica, no existeix cap asímptota horitzontal, ni obliqua.

Selectivitat.io

Exemples

Per a la funció de la dreta:

- Asímptotes verticals

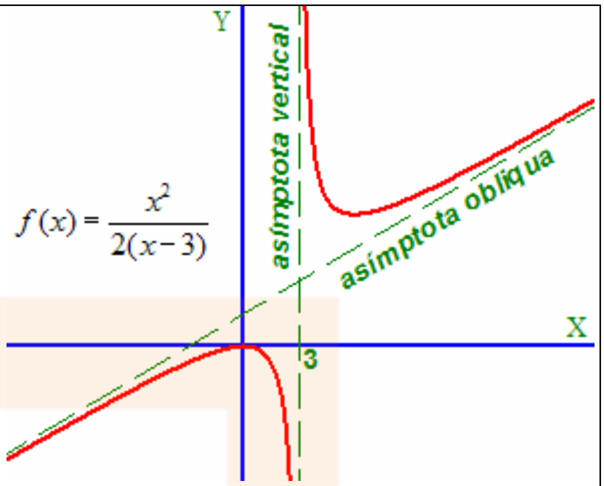
$$2(x-3)=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

- Asímptotes no verticals: $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x(x-3)}=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\tfrac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x-6}=\frac{3}{2}$$

Per tant, $\boxed{y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$



J. Càlcul de límits: La regla de l'Hôpital

Per a quan hagueu de calcular asímptotes, us convé conèixer la següent regla:

Regla de l'Hôpital

Suposem que f i g són dos funcions derivables. Imaginem que

$$\lim_{x\to\boxed{A}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \quad \text{o bé} \quad \lim_{x\to\boxed{A}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

on $\boxed{A}$ indica un nombre real, o infinit. En aquestes condicions, si existeix el

$$\lim_{x\to\boxed{A}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\boxed{L}$$

aleshores també $\lim_{x\to\boxed{A}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\boxed{L}$

Exemple

Calculant, $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\dfrac{2^3-8}{2-2}=\dfrac{0}{0}=?$

La indeterminació es resol immediatament si calculem el límit del quocient de derivades:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-8)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1}=\frac{3\cdot 2^2}{1}=12$$

Por tanto, d'acord amb la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12$$

K. Passos per representar gràficament una funció: *y = f(x)*

Per representar gràficament una funció, se solen cobrir 3 etapes

Etapa 1: Domini, asímptotes i signes de la funció (per tant, resoldre l'equació $f(x) = 0$)

Etapa 2: Estudi del creixement, decreixement, màxims i mínims (per tant, resoldre l'equació $f'(x)=0$ i resumir el creixement en l'esquema de monotonia)

Etapa 3: Estudi de la concavitat, convexitat i punts d'inflexió ((per tant, resoldre l'equació $f''(x)=0$ i resumir en l'esquema de concavitats)

Advertència: Sol ser normal que a mesura que es van calculant derivades, les expressions es compliquin. Per tant, és possible que en molts casos hagueu de representar funcions sense poder cobrir les 3 etapes, perquè alguna de les 3 equacions anteriors sigui difícil resoldre-la. Llavors, haureu d'intentar fer el dibuix sense cobrir les tres.

Selectivitat.io