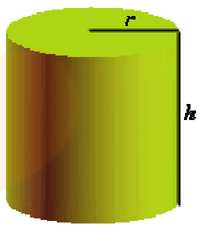
RECEPTES SOBRE APLICACIÓ DE MÀXIMS i MÍNIMS i INTEGRACIÓ

A. Problemes d'aplicació de màxims i mínims

En la vida real, és freqüent la necessitat de trobar el millor valor d'una magnitud M que depén d'una sèrie de variables, *x, y, z*, ..., que es poden controlar. El que se sol fer és seguir aquest procediment:

1. **Expressar M en funció de variables que es puguin relacionar M(*x,y,z,...*)**
2. **Utilitzar les condicions del problema per expressar totes les variables en funció d'una sola (per exemple, *y, z*, ... en funció de només *x*). Aleshores, substituint-les en l'expressió anterior, quedarà M en funció d'una variable: M = M(x, y(x), ...)**
3. **Quan M queda expressada en funció d'una variable, es resol l'equació M'(x)=0 i es comprova en quina de les solucions surt el valor òptim (màxim o mínim)**

Un cas real: Imagineu, per exemple, una fàbrica de conserves que vulgui llençar al mercat un nou producte en pots d'1 litre de capacitat. Lògicament, intentaran que cada pot els hi surti el més barat possible, i el pot més barat serà el que requereixi la menor quantitat possible de llauna, és a dir, aquell que, essent d'1 litre, tingui la menor superfície possible. Vegem com podrien resoldre el seu problema:



- **Magnitud que volen fer òptima: *S* = <u>superfície total</u> d'un cilindre**

  S s'expressa en funció del radi de la base, *r*, i de l'altura, *h*

  $$S = S_{lateral} + S_{bases} = 2\pi rh + 2\pi \cdot r^2 \qquad \textbf{(A)}$$

- **Condicions imprescindibles: el volum, *V*, ha de ser 1 litre**

  $$V = \pi r^2 h = 1 \qquad \textbf{(B)}$$

Vegem en (A) que *S* és funció de 2 variables: *r, h.* Ara bé, en (B) podem trobar una relació entre elles: $h = \frac{1}{\pi r^2}$ **. Per tant, substituint aquest valor en (A),**

$$S = 2\cancel{\pi}\cancel{r}\frac{1}{\cancel{\pi}r^{\cancel{2}}} + 2\pi \cdot r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi \cdot r^2$$

Ara, quan ja tenim *S* en funció de només una variable, podem usar la teoria de màxims i mínims per calcular el seu valor més petit:

1. **Resolem *S'(r)=0*** $\left(S'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 2 \Rightarrow r = \sqrt[3]{1/(2\pi)} = 0{,}54 \right)$
2. **Comprovem que amb aquest valor s'obté superfície mínima. Com? Es pot fer de diverses formes; per exemple, calculant el signe de la derivada segona**

$$S''(r) = \frac{4}{r^3} + 4\pi \Rightarrow S''(\sqrt[3]{1/(2\pi)}) = \frac{4}{\frac{1}{2\pi}} + 4\pi = 12\pi > 0 \Rightarrow \text{Mínim en } r = \sqrt[3]{1/(2\pi)}$$

B. Primitives d'una funció *f*

Recordeu que tota funció *F* amb la que es compleixi $F'(x) = f(x)$, para qualsevol *x*, s'anomena *primitiva de la funció f.* El conjunt de totes les primitives de *f* s'anomena *integral indefinida de la funció f* i s'escriu així

$$\textit{Integral indefinida de la funció } f: \boxed{\int f(x)dx}$$

Normalment, tractem amb funcions definides en un interval i, llavors, totes les primitives de *f* s'obtenen sumant a una d'elles una constant. Per això, s'escriu

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \qquad (C \text{ constant})$$

És important que repasseu les integrals immediates, i entre aquestes, sobretot les següents:

$$\int dx = x + C \qquad \int x^n dx = \tfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ si\ n \neq -1 \qquad \int \sqrt[n]{x}dx = \tfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int e^x dx = e^x + C \qquad \int \tfrac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\ dx = \sin x + C \qquad \int \tan x\ dx = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{cotan}\, x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \tfrac{1}{a}\ln(ax+b) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

Propietats que permeten descomposar una integral en altres

Aneu amb compte en descomposar integrals, perquè només es pot fer si la funció és una suma o una diferència, però no quan és un producte, ni quan és un quocient. Més exactament:

(P1) $\boxed{\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx \qquad \int (f-g)dx = \int f dx - \int g dx}$

Per tant, és correcte escriure $\int (x^3 + 2x - e^{5x})dx = \int x^3 dx + \int 2x dx - \int e^{5x} dx$

(P2) $\boxed{\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx,\ \text{ si } k \text{ és una constant}}$

És correcte $\int (2x - e^{5x})dx = 2\int x dx - \int e^{5x} dx$, perquè 2 està multiplicant a x

No és correcte $\int e^{5x} dx = 5 \cdot \int e^x dx$, perquè el 5 no està multiplicant a e^x

Compte! <u>És incorrecte</u> escriure descomposicions com les següents:

$\int x \cdot \ln x\ dx = \int x dx \cdot \int \ln x\, dx$, perquè cap propietat del producte de funcions no ho permet

$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\int \sin x\, dx}{\int \cos x\, dx}$, perquè cap propietat del quocient de funcions no ho permet

C. Mètodes de càlcul de primitives

Només us indicarem dos mètodes de càlcul de primitives: el *mètode de substitució*, i el d'*integració de funcions racionals amb denominador de grau 2*. (Us convindria, però, repassar també els casos senzills del mètode conegut amb el nom d'*integració per parts*).

Integració per substitució

Molt sovint, una integral es calcula fàcilment si es canvia la variable x tenint en compte que si $x = a(t)$, aleshores $dx = a'(t)dt$. Així, obtenim la fórmula següent:

$$\boxed{\int f(x)dx \underset{x=a(t)}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \int f(a(t)) \cdot a'(t)dt = \dots}$$

Nota: Trobar un canvi de variable no sol ser fàcil, tot i que de vegades és evident, com ara en el cas següent, en el qual tot invita a provar el canvi $x = t^2$, perquè així s'elimina l'arrel quadrada:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \underset{x=t^2 \Rightarrow dx=2tdt}{\underset{\uparrow}{=}} \int \frac{2t\, dt}{1+t} = 2\int \frac{t}{t+1} dt = 2\int \left(\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2\left(\int 1 dt - \int \frac{1}{t+1} dt \right) =$$

$$= 2\left(t - \ln(t+1) + C\right) = 2(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1)) + C$$

Integració de funcions racionals amb denominador de grau 2

Només tractarem 2 casos: Que el *denominador tingui una arrel real*, o que en *tingui dues*.

a) Cas $\boxed{I=\int \frac{ax+b}{(x-c)^2}dx}$

Heu de començar calculant 2 constants A i B tales que $\frac{ax+b}{(x-c)^2}=\frac{A}{x-c}+\frac{B}{(x-c)^2}$. El càlcul dels nombres A i B es realitza fent la suma del 2n membre (denominador comú igual a $(x-c)^2$), igualant els numeradors i resolent un sistema resultant. Llavors,

$$\int \frac{ax+b}{(x-c)^2}dx = A\int\frac{1}{x-c}dx + B\int\frac{1}{(x-c)^2} = A\cdot\ln(x-c) + B\frac{-1}{x-c}+C$$

b) Cas $\boxed{I=\int \frac{ax+b}{(x-c_1)\cdot(x-c_2)}dx}$

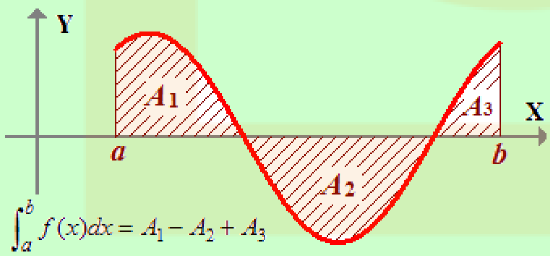
Heu de començar calculant 2 constants A i B tals $\frac{ax+b}{(x-c_1)(x-c_2)}=\frac{A}{x-c_1}+\frac{B}{x-c_2}$.

Les constants *A* i *B* es calculant com en el cas anterior. Després, es pot escriure

$$\int\frac{ax+b}{(x-c_1)\cdot(x-c_2)}dx = \int\frac{A}{x-c_1}dx + \int\frac{B}{x-c_2}dx = A\cdot\ln(x-c_1)+B\ln(x-c_2)+C=$$

D. La *integral definida* i la regla de Barrow

No entrarem en la definició rigorosa d'*integral definida*, que és molt més complicada que la d'*integral indefinida*. En aquest recetari, volem centrar només l'atenció en què quan vegeu una expressió com $\int_a^b f(x)dx$, sapigueu bé "què pot significar" i "com es pot calcular"

Què pot significar $\int_a^b f(x)dx$?	**Com intentar el càlcul de $\int_a^b f(x)dx$?**
$\int_a^b f(x)dx$ és una suma algebraica d'àrees *algebraica* vol dir que les que quedin per sobre de l'eix X porten signe **+** i les que quedin per sota, signe **–** 	**Per obtenir el valor de $\int_a^b f(x)dx$,** **1. Es calcula una primitiva, *F(x)*, de *f(x)*** **2. S'aplica la fórmula** $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)}$ ***(regla de Barrow)*** Heu de saber que si *f* és una funció contínua, sempre existeix una primitiva, però sovint és molt difícil, o impossible, calcular-la. Llavors, no hi ha més forma de calcular la integral que utilitzant mètodes d'aproximació, però aquests no hi entren a les PAU

Exemple: $\int_5^7 4x^3dx = F(7)-F(5) = 7^4-5^4 = 1776$, perquè una primitiva de $4x^3$ és $F(x)=x^4$

Dues preguntes lògiques: Quant val $\int_a^a f(x)dx$? Com es calcula $\int_a^b f(x)dx$, si $a>b$?

Respostes: $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$ $\int_a^b f(x)dx$, si $a>b$, es calcula amb la regla de Barrow i, per tant, no heu d'oblidar que $\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$