RECEPTES SOBRE GEOMETRIA

A. Vector director d'una recta i vector perpendicular a un pla

$$\text{Recta } r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \Rightarrow \text{Vector director: } \vec{v}=\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\text{Pla } p: \; a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \;\Rightarrow\; \text{Vector perpendicular: } \vec{v}=(a_1,b_1,c_1)$$

B. Interpretació geomètrica d'un sistema d'equacions lineals

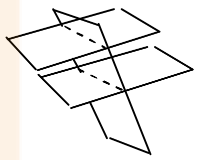
Indicarem els casos que us trobareu més habitualment en exàmens: Sistemes 2x2 i 3x3

A1. Sistemes de 2 equacions i 2 incògnites

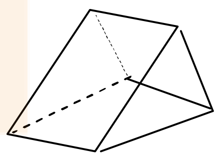
- Si el sistema és compatible i determinat, representa geomètricament 2 rectes d'un pla que es tallen en un punt (s'anomenen *rectes secants*)
- Si el sistema és compatible i indeterminat, aleshores és que les dues equacions són equivalents; per tant, representa geomètricament 2 *rectes coincidents*.
- Si el sistema és incompatible, no té solució i es tracta de 2 *rectes paral·leles*.

A2. Sistemes de 3 equacions amb 3 incògnites (cada equació representarà un pla de l'espai)

- Si el sistema és compatible i determinat, representarà 3 plans amb un únic punt en comú (és, per tant, un angle de 3 cares, o *angle triédre*)
- Si el sistema és compatible determinat, et pots trobar amb 2 possibilitats:
  - Només una incògnita serveix de paràmetre (rang=2). Aleshores, els 3 plans tenen en comú una recta (s'anomenen plans d'un *feix*)
  - Dues incògnites fan de paràmetres (rang=1). Aleshores, les 3 equacions són equivalents i, per tant, es tracta de 3 *plans coincidents*.
- Si el sistema és incompatible, es podrien presentar 2 situacions:
  - rangA=1 i rangA'=2. Aleshores, es tracta de 3 *plans paral·lels*.
  - rangA=2 i rang A'=3. En aquest cas, poden sortir 2 situacions:
    - <u>Si n'hi ha 2 plans paral·lels</u> (o sigui, amb coeficients proporcionals), aleshores el sistema representa 3 plans, dos dels quals són paral·lels i l'altre els talla.



    - <u>Si veiem que no n'hi ha 2 plans paral·lels</u>, aleshores és que els 3 plans són cares d'un prisma triangular. El sistema representa, doncs, un *prisma triangular*.



C. Posicions relatives de dues rectes a l'espai

$$\text{Recta } r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$$

$$\text{Recta } r': \begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \\ a_4x+b_4y+c_4z=d_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

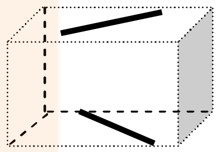
$|\leftarrow \; A \; \rightarrow|$

$\leftarrow \; A' \; \rightarrow$

A la dreta hem indicat les matrius A i A'

El *rang(A)* serà com a mínim 2 i, com a màxim, 3. El *rang(A')* pot estar entre 2 i 4. Les possibilitats existents són les següents:

- § *rang(A)=2, rang(A')=2*. Aleshores les 4 equacions equivalen a dues (*rectes coincidents*)
- § *rang(A)=2, rang(A')=3*. Aleshores, en la matriu *A*, les 4 files equivalen a dues, però el sistema no té cap solució (*rectes paral·leles*)
- § *rang(A)=3, rang(A')=3*. Aleshores, el sistema té exactament una solució i, per tant, es tracta de 2 *rectes secants*.
- § *rang(A)=3, rang(A')=4*. Aleshores, és un sistema incompatible, o sigui, les rectes no tenen cap punt en comú, però com que *rang(A)=3*, no poden ser paral·leles i, per tant, ocupen una posició a l'espai com en la figura (es diu que les *rectes es creuen*)



Nota: De vegades es posen exercicis que parlen de *rectes coplanàries* (o sigui, rectes que estan contingudes en un pla). Penseu que dels 4 casos anteriors, en els 3 primers són rectes coplanàries i que els 3 casos junts equivalen a la igualtat *det(A') = 0*. Per exemple, si us donen 2 rectes en les quals apareix un coeficient *k* desconegut, i us demanen el valor de *k* per tal que siguin coplanàries, només heu de resoldre l'equació *det(A') = 0* per obtenir el valor de *k*.

D. Posicions relatives d'una recta i un pla a l'espai

Recta $r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$

Pla $p: \; a_3x+b_3y+c_3z=d_3$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

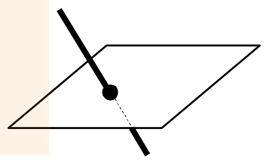
$|\leftarrow \; A \; \rightarrow|$

$\leftarrow \mathbf{L} \;\; A' \;\; \mathbf{L} \rightarrow$

A la dreta hem indicat les matrius *A* i *A'*

El *rang(A)* serà com a mínim 2 i, com a màxim, 3. El *rang(A')* pot estar també entre 2 i 3. Les possibilitats existents són les següents:

- § *rang(A)=2, rang(A')=2*. Aleshores les 3 equacions equivalen a les 2 primeres, o sigui, tots els punts de la recta compleixen l'equació del pla (*recta continguda en el* pla)
- § *rang(A)=2, rang(A')=3*. Aleshores, en la matriu *A*, les 3 files equivalen a dues, però el sistema no té cap solució (*recta és paral·lela al pla*)
- § *rang(A)=3, rang(A')=3*. Aleshores, és un sistema compatible, o sigui, la recta i el pla tenen exactament un punt en comú; es diu que la *recta és secant al pla*.



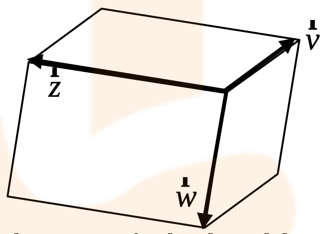
E. Posicions relatives de dos plans a l'espai

Pla $p: \; a_1x+b_1y+c_1z=d_1$

Pla $p': \; a_2x+b_2y+c_2z=d_2$

- § Si $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$, els plans són paral·lels.
- § Si **no es compleix** $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, els plans es tallen en una recta

E. Productes escalar, vectorial i mixt

Producte escalar: $\begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{w} = \lVert\vec{v}\rVert\,\lVert\vec{w}\rVert\cos\alpha \\ \text{on } \alpha \text{ és l'angle de } \vec{v} \text{ i } \vec{w} \end{cases}$ Observeu que $\lVert\vec{v}\rVert = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$	§ Si els vectors s'expressen en una base ortonormal (3 vectors unitaris i ortogonals), $(v_1, v_2, v_3)\cdot(w_1, w_2, w_3) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ § Així doncs, $\lVert(v_1, v_2, v_3)\rVert = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$
Mòdul prod vectorial: $\begin{cases} \lVert\vec{v}\wedge\vec{w}\rVert = \lVert\vec{v}\rVert\,\lVert\vec{w}\rVert\sin\alpha \\ \text{on } \alpha \text{ és l'angle de } \vec{v} \text{ i } \vec{w} \end{cases}$	§ El vector producte vectorial el podeu calcular desenvolupant el determinant següent: $(v_1, v_2, v_3)\wedge(w_1, w_2, w_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ on $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ són els vectors unitaris directors dels eixos de coordenades, X, Y i Z
Producte mixt de 3 vectors $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$: És el valor de $\vec{v}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{z})$, el qual coincideix amb el determinant dels 3 vectors i, també, amb el volum del prisma que es pot construir prenent els vectors com a arestes (figura adjunta)	 El producte mixt és el volum del prisma

F. Com "convertir" un vector en unitari

- Donat un vector $\vec{v}$, es poden obtenir 2 vectors de mòdul 1 (o sigui, *vectors unitaris*) a partir d'ell. Aquests vectors són els següents:

  1. $\vec{u}_1 = \dfrac{\vec{v}}{\lVert\vec{v}\rVert}$, que serà del mateix sentit que el vector $\vec{v}$
  2. $\vec{u}_2 = -\dfrac{\vec{v}}{\lVert\vec{v}\rVert}$, que serà de sentit contrari al del vector $\vec{v}$

  Exemple: El mòdul del vector $\vec{v} = (1, -2, 2)$ és $\lVert\vec{v}\rVert = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$ Per tant, el vector $(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$ és unitari i té el mateix sentit.

F. Distàncies

- ***Distància entre 2 punts de l'espai***

  La distància entre dos punts A i B és, per definició, el mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$, o sigui,

$$\boxed{d(A, B) = \lVert\overrightarrow{AB}\rVert = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$$

- ***Distància d'un punt a un pla*** (Punt $P = (p_1, p_2, p_3)$, pla π : $ax + by + cz = d$)

$$\boxed{dist(P, \pi) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

- ***Distància d'un punt a una recta***
  Per calcular la distància d'un punt *P* a una recta *r*, pots fer el següent:
  1. Calcular un vector director de la recta (vector $\vec{v}$) i un punt, *A*, sobre la recta
  2. Aplicar la fórmula $\boxed{dist(P,r)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{v}\right\|}{\left\|\vec{v}\right\|}}$

  També pots fer-ho de la següent manera:
  1. Calcules l'equació del pla que passa per *P* i és perpendicular a la recta *r*
  2. Resols el sistema format per les equacions del pla i de la recta *r*. Si *P'* és el punt solució d'aquest sistema, resulta: $\boxed{dist(P,r)=dist(P,P')}$

- ***Distància entre 2 plans paral·lels***
  Per calcular la distància entre 2 plans paral·lels, π i π', calcula un punt *P* en π' i, després, calcula $dist(P,\pi)$.

- ***Distància entre 2 rectes paral·leles***
  El cas és similar totalment a l'anterior: Si les rectes són *r* i *r'*, has de calcular un punt *P* en *r'* i, després, calcular *dist(P,r)*.

F. Angles

- ***Angle de 2 vectors,*** $\vec{v}$ i $\vec{w}$:

  El podràs obtenir a partir de la fórmula del producte escalar de la següent manera:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\left\|\vec{v}\right\|\left\|\vec{w}\right\|}=\frac{v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3}{\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}\sqrt{w_1^{\,2}+w_2^{\,2}+w_3^{\,2}}}$$

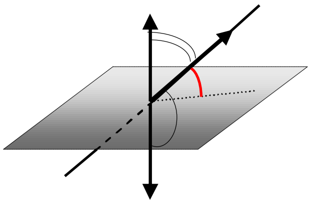
- ***Angle de 2 rectes***
  És el menor dels angles que formin dos vectors directors de les rectes; per tant, es calcula aplicant la fórmula anterior, però aplicant-la en valor absolut:

$$\cos\alpha=\left|\frac{v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3}{\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}\sqrt{w_1^{\,2}+w_2^{\,2}+w_3^{\,2}}}\right|$$

- ***Angle de dos plans*** (pla $\pi: ax+by+cz=d$, pla $\pi': mx+ny+pz=q$)
  És el menor dels angles que formin dos vectors perpendiculars als plans. Per tant, es calcula com en el cas anterior, però utilitzant els vectors *(a,b,c)* i *(m,n,p)*:

$$\cos\alpha=\left|\frac{am+bn+cp}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right|$$

- ***Angle d'una recta i un pla***
  És defineix de forma una mica diferent: És el complementari del menor dels angles formats per un vector de la recta i un vector perpendicular al pla (angle vermell). Per tant, s'aplica la fórmula:



$$\sin\alpha=\left|\frac{v_1a+v_2b+v_3c}{\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$