

TEMA 4

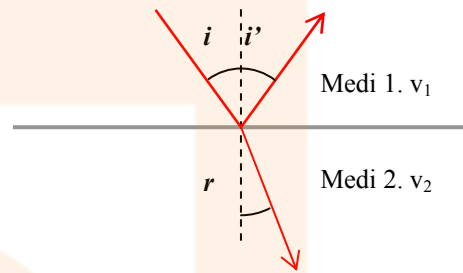
REFLEXIÓ I REFRACCIÓ

OPTICA GEOMÈTRICA

EFECTE DOPPLER

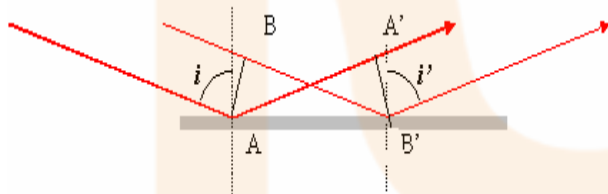
4.1. REFLEXIÓ I REFRACCIÓ. LA LLEI D'SNELL.

Quan el raig d'una ona incideix sobre la superfície de separació dels medis 1 i 2 amb velocitats de propagació v_1 i v_2 respectivament i ho fa amb un angle d'incidència i respecte la normal de la superfície de separació dels medis, es produeix la divisió del raig principal en dos. El raig incident es bifurca en el raig reflectit amb un angle de reflexió i' mesurat respecte la normal i el raig refractat amb un angle de refracció r mesurat respecte la mateixa normal. Els tres raigs estan continguts en el mateix pla i els angles prenen valors entre 0° i 90° . Però quina relació hi ha entre els angles? Hi ha algun valor prohibit per a ells? Si coneixem un dels angles podem calcular-ne el valor dels dos restants?



- Relació entre l'angle d'incidència i i angle de reflexió i'

Anem a veure quina relació hi ha entre l'angle de reflexió i' i l'angle d'incidència i . Un front d'ona incideix sobre la superfície de separació dels medis 1 i 2. El front d'ona

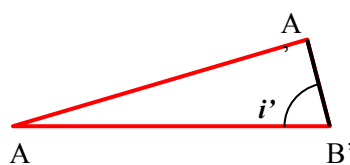
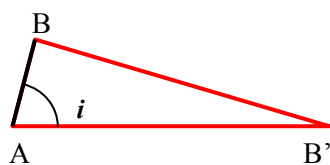


ve definit per dos raigs paral·lels i que incideixen respectivament a A i B' sobre la superfície plana. Els dos raigs en ser perpendiculars al front presenten trajectòries paral·leles i al cap d'un temps el front haurà rebotat i estarà situat en A' i B' (veure la figura).

El front AB s'ha traslladat fins A'B' en un temps Δt . Podem relacionar les distàncies AA' i BB' amb la velocitat de propagació v_1 de l'ona en el medi 1 i el temps de viatge Δt .

$$\begin{aligned} AA' &= v_1 \cdot \Delta t \\ BB' &= v_1 \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (4.1)$$

De la figura anterior podem observar dos triangles rectangles (ABB' – AA'B'). D'aquests triangles deduirem les següents relacions trigonomètriques:



$$\begin{aligned} AA' &= AB' \cdot \sin \hat{i}' \\ BB' &= AB' \cdot \sin \hat{i} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Igualant les relacions (4.1) i (4.2) ens quedarà:

$$\left. \begin{aligned} AA' &= AB' \cdot \sin \hat{i}' \\ BB' &= AB' \cdot \sin \hat{i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{AB' \cdot \sin \hat{i}'}{AB' \cdot \sin \hat{i}} \Rightarrow \sin \hat{i}' = \sin \hat{i}$$

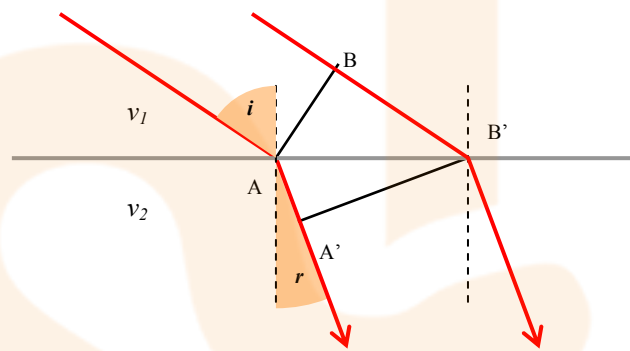
$$\left. \begin{aligned} AA' &= v_1 \cdot \Delta t \\ BB' &= v_1 \cdot \Delta t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{v_1 \cdot \Delta t}{v_1 \cdot \Delta t} = 1$$

En conclusió, l'angle d'incidència i l'angle de reflexió són iguals.

$$\hat{i}' = \hat{i}$$

• Relació entre l'angle d'incidència i i angle de refracció r . La llei d'Snell

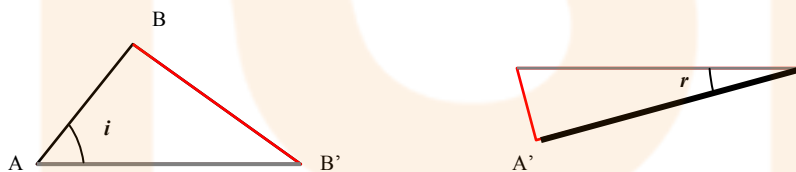
Veiem què passa quan el raig es refracta en incidir sobre la superfície de separació dels dos medis anteriors.



El front d'ona AB trigarà un temps Δt a propagar-se fins a $A'B'$. Podem relacionar les distàncies AA' i BB' amb les respectives velocitats de propagació i el temps de viatge Δt .

$$\begin{aligned} AA' &= v_2 \cdot \Delta t \\ BB' &= v_1 \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (4.3)$$

De la figura de refracció podem extreure dos triangles ABB' i $AA'B'$ i les conseqüents relacions trigonomètriques.



$$\begin{aligned} AA' &= AB' \cdot \sin \hat{r} \\ BB' &= AB' \cdot \sin \hat{i} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Igualant les relacions (4.3) i (4.4) obtindrem:

$$\left. \begin{aligned} AA' &= AB' \cdot \sin \hat{r} \\ BB' &= AB' \cdot \sin \hat{i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{AB' \cdot \sin \hat{r}}{AB' \cdot \sin \hat{i}} \Rightarrow \frac{\sin \hat{r}}{\sin \hat{i}} = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\left. \begin{aligned} AA' &= v_2 \cdot \Delta t \\ BB' &= v_1 \cdot \Delta t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{v_2 \cdot \Delta t}{v_1 \cdot \Delta t} = \frac{v_2}{v_1}$$

Reordenant la darrera igualtat ens quedarà:

$$\frac{1}{v_2} \cdot \sin \hat{r} = \frac{1}{v_1} \cdot \sin \hat{i}$$

Aquesta expressió rep el nom de *llei d'Snell* de la refracció i és vàlida per a tots els tipus d'ones mecàniques i electromagnètiques.

És interessant observar que els angles d'incidència i i de refracció r mai seran iguals ja que les velocitats de propagació v_1 i v_2 no són iguals.

$$v_1 < v_2 \Rightarrow \hat{i} < \hat{r}$$

$$v_1 > v_2 \Rightarrow \hat{i} > \hat{r}$$

Així doncs la reflexió i refracció de les ones a través de la superfície de separació d'un medi material es pot resumir a partir de tres lleis fonamentals.

1. Els raigs incident, reflectit, refractat i la normal estan sempre continguts en el mateix pla.
2. L'angle d'incidència i l'angle de reflexió sempre són iguals.
3. L'angle d'incidència i l'angle de refracció compleixen la llei d'Snell.

$$\frac{1}{v_2} \cdot \sin \hat{r} = \frac{1}{v_1} \cdot \sin \hat{i}$$

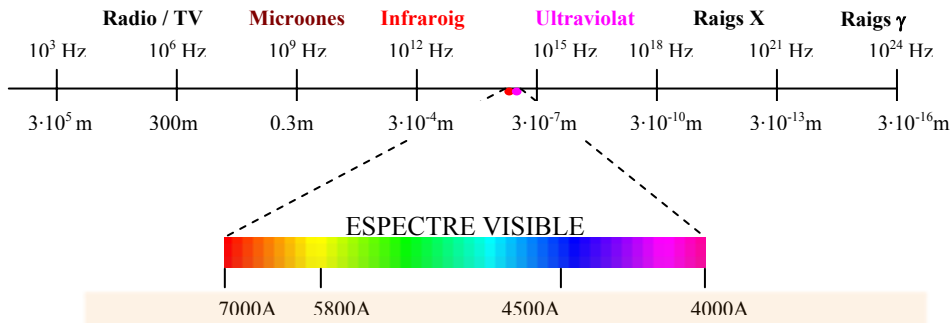
- Índex de refracció de la llum

Les ones electromagnètiques es propaguen pel buit a una velocitat constant c ($c \approx 300.000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$). Ara bé quan les ones electromagnètiques viatgen per un medi material la seva velocitat de propagació v és menor de c ($v < c$). Aleshores podem definir l'índex de refracció de la llum en el medi com la relació $n = \frac{c}{v}$. Sempre es

compleix que $n \geq 1$. A la taula adjunta apareixen els índex de refracció de les ones electromagnètiques per alguns medis materials.

| MEDI MATERIAL | n | V |
|---------------|---------------|--|
| Buit | 1 | $299.860 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| Aire | 1,00029 | $299.770 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| Aigua | $\frac{4}{3}$ | $224.890 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| Vidre | 1,46 a 1,96 | - |
| Diamant | 2,45 | $122.391 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ |

Cal tenir en compte que la freqüència de la llum pot prendre molts valors possibles. La distribució de les diferents freqüències de la llum constitueixen el continu de l'espectre electromagnètic. Encara que nosaltres prendrem l'índex de refracció de la llum com un paràmetre constant i que només depèn de la velocitat de la llum a través del medi material, en realitat l'índex n també depèn de la longitud d'ona de les ones que viatgen a través d'un medi material qualsevol perquè la velocitat de la llum quan aquesta viatge a través d'un medi diferent del buit depèn de la freqüència. És a dir la llum blava i la llum vermella viatgen a velocitats diferents per l'aire, l'aigua o el vidre. D'aquesta manera es pot explicar el fenomen de la dispersió de la llum blanca a través d'un prisma triangular o la formació de l'arc de Sant Martí quan aquesta travessa una gota d'aigua.



Així doncs l'índex de refracció és $n = n(\lambda)$, és a dir ($n \approx n_o + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^2 + \dots + a_n \cdot \lambda^n$). En l'aire a 1 atm de pressió i 0°C de temperatura l'índex de refracció de la llum visible varia des de $n_{violeto} = 1,0002957$ a $n_{vermell} = 1,0002914$.

La llei d'Snell es pot expressar a partir de l'índex de refracció de la llum com:

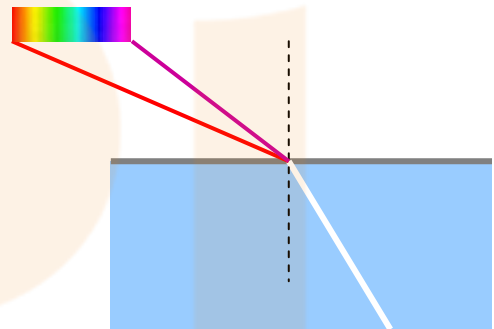
$$\frac{1}{v_2} \cdot \sin \hat{r} = \frac{1}{v_1} \cdot \sin \hat{i} \Rightarrow \frac{c}{v_2} \cdot \sin \hat{r} = \frac{c}{v_1} \cdot \sin \hat{i}$$

$$n_2 \cdot \sin \hat{r} = n_1 \cdot \sin \hat{i}$$

EXEMPLE

“Considerem un raig de llum blanca que prové de dins de l'aigua i que incideix sobre la superfície plana de separació amb l'aire. Deduïu la distribució dels diferents colors de la llum a la sortida del raig.”

Tenint en compte la llei d'Snell, l'angle de sortida depèn de l'índex de refracció. Com que tots els colors que constitueixen l'espectre electromagnètic es propaguen per un mateix medi amb velocitats diferents però semblants, hem de considerar que a major índex de refracció, major angle de sortida. Per tant com que en l'aire $n_{vermell} < n_{violeto}$ i suposant que en l'aigua $n_{vermell} \approx n_{violeto} \approx n_{aigua}$, ens quedarà:



$$\left. \begin{array}{l} n_{violeto} \cdot \sin \hat{r}_{violeto} = n_{aigua} \cdot \sin \hat{i} \\ n_{vermell} \cdot \sin \hat{r}_{vermell} = n_{aigua} \cdot \sin \hat{i} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{n_{violeto} \cdot \sin \hat{r}_{violeto}}{n_{vermell} \cdot \sin \hat{r}_{vermell}} = 1 \Rightarrow \frac{n_{violeto}}{n_{vermell}} = \frac{\sin \hat{r}_{vermell}}{\sin \hat{r}_{violeto}} \Rightarrow \hat{r}_{vermell} > \hat{r}_{violeto}$$

- Angle límit.

Considerem un raig de llum que viatja del medi 1 al medi 2. Les velocitats de propagació de la llum a través del medi 1 i medi 2 són v_1 i v_2 respectivament. A més el raig incideix sobre la superfície de separació de l'aigua amb un angle d'incidència i mesurat respecte la normal. En ser $v_1 < v_2$, el raig de sortida s'apartarà un angle r de la normal i a més es complirà que $r > i$. Ara, anem augmentant l'angle d'incidència i . Conseqüentment l'angle r també augmentarà, i arribarà un moment que l'angle de refracció valdrà 90°. Quan això passi direm que l'angle d'incidència és l'angle límit. És

curios observar que per angles d'incidència majors que l'angle límit, no hi haurà raig refractat. En aquesta situació diem que es produeix una *reflexió total* del raig incident.

EXEMPLE.

Calculeu l'angle límit pels raigs que viatgen de l'aigua cap a l'aire. ($n_{\text{aigua}} = \frac{4}{3}$).

4.2. ÒPTICA GEOMÈTRICA

Quan observem un objecte a través d'una esfera massissa veiem l'objecte deformat. La forma, la mida i la posició aparent d'aquest objecte són diferents a les de l'objecte real. La nova visió que tenim d'aquest objecte és la seva projecció a través de l'esfera. La projecció s'anomena imatge de l'objecte i l'element que relaciona la seva forma i posició, l'esfera, s'anomena sistema òptic.

De sistemes òptics n'hi ha de molts tipus diferents, però en aquest tema ens centrarem en l'estudi de dos tipus en concret, les lents i els miralls.

L'estudi d'aquests sistemes òptics el farem des de dos punts de vista diferents.

1. La representació gràfica de la formació d'imatges.
2. El càlcul de la posició i mida de les imatges.

Conceptes previs

Sistema òptic centrat.

Entenem per sistema òptic centrat a aquell sistema format per superfícies refractants esfèriques tals que els seus centres de curvatura estan perfectament aliniats. Per a nosaltres tots els sistemes òptics seran centrats.

Sistema òptic perfecte.

Diem que un sistema òptic és perfecte quan:

1. A un *pla objecte normal* a l'eix del sistema li correspon un *pla imatge normal* al mateix eix.
2. Si l'objecte és *puntual* la imatge és *puntual*.
3. Un objecte en el pla objecte té la imatge en el pla imatge.

Les lents com a sistemes òptics centrats perfectes.

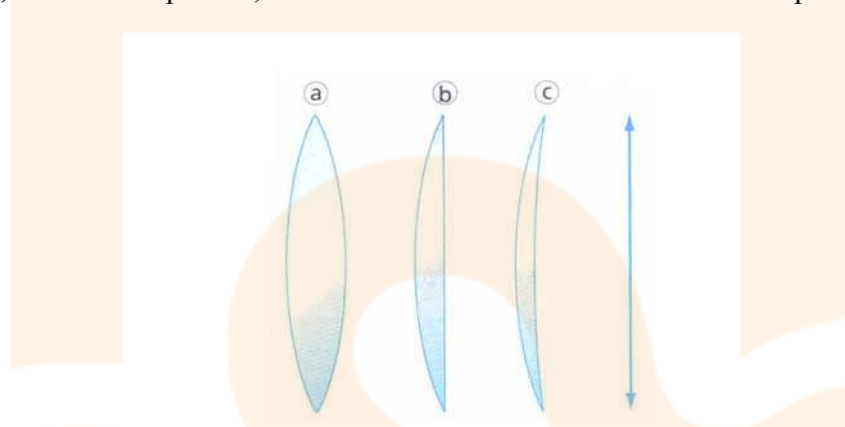
El primer tipus de sistema òptic a estudiar seran les lents. Una lent és pot construir a partir de la intersecció de dues esferes fetes del mateix material i amb un índex de refracció major que 1.



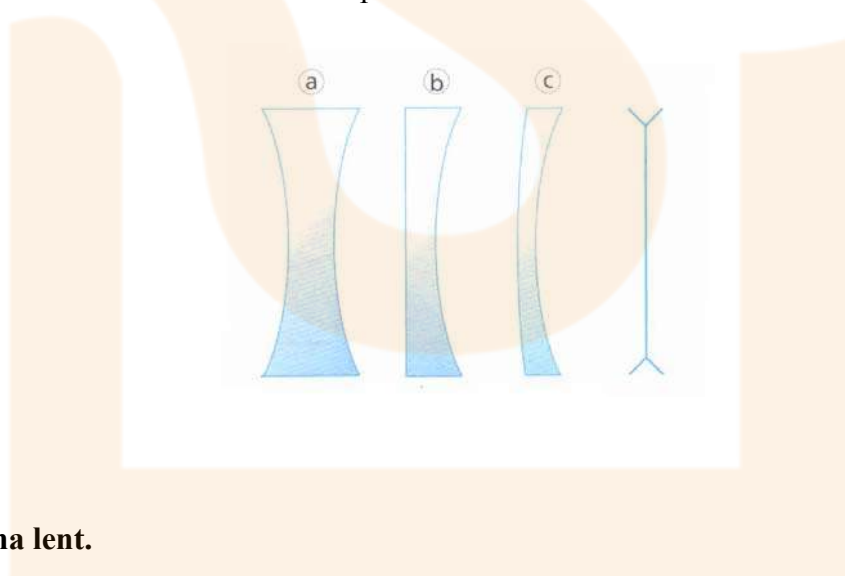
La zones delimitades per les dues esferes és el que ens defineix la lent. Veiem clarament que els dos sistemes són centrats. Definim gruix de la lent com la màxima distància entre les superfícies que defineixen la lent. Si el gruix és molt petit en front de la grandària de la lent diem que la lent és prima. En tots els problemes sempre treballarem amb lents primes.

Distingim doncs bàsicament dos tipus de lents, *lents convergents* i *lents divergents*.

- *Lents convergents*. Són més gruixudes del centre. Segons la forma de les seves cares parlarem de lents Biconvexes (a), planoconvexes (b) i concavo-convexes (c). Totes elles, si són lents primes, les dibuixarem com una fletxa amb dues puntes.

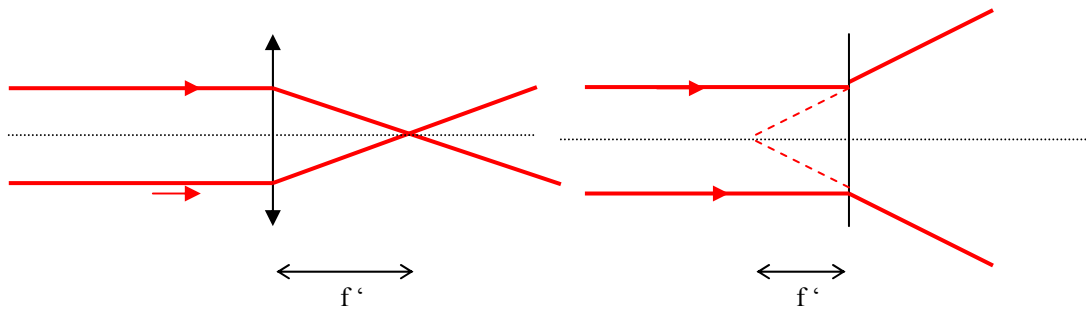


- *Lents divergents*. Són més primes del centre. Segons la forma de les seves cares parlarem de lents bicòncaves (a), planoconcaves (b) i convexo-còncaves (c) Si són primes es dibuixen una línia amb dues puntes invertides.



Focal d'una lent.

Agafem una lent convergent i una lent divergent. Sobre elles fem incidir raigs de llum amb una direcció paral·lela a l'eix del sistema. Observarem que els raigs, una vegada traspassen la lent, coincideixen en un punt sobre l'eix del sistema. Aquest punt s'anomena **focus imatge** de la lent i la seva distància a la lent es coneix com **distància focal** o **focal** i es representa per f' . aquesta distància s'expressa normalment en mil·límetres. $[f'] = 1 \text{ mm}$.



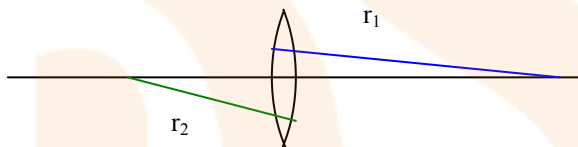
Si la llum prové de l'esquerra de la lent la focal de les lents convergents estarà a la dreta de la lent. Si la lent és divergent la focal estarà a l'esquerra de la lent.

Totes les lents tenen dos focus, el focus objecte i el focus imatge. Les distàncies focals respectives són iguals per les lents primes.

Per a les lents primes es demostra que la focal imatge ve donada per :

$$\frac{1}{f'} = (n_{\text{lent}} - n_{\text{medi}}) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

on n_{lent} és l'índex de refracció de la lent, n_{medi} és l'índex de refracció del medi que rodeja la lent que normalment és aire. r_1 i r_2 són els radis de curvatura de cada una de les cares de la lent, concretament els radis de les cares esquerra i dreta respectivament. Cal tenir present que els radis els expressarem en **mil·limetres**.



Criteri de signes.

Considerem una lent qualsevol. Totes les distàncies es mesuraran respecte el centre de la lent. Si les distàncies són cap a la dreta aquestes seran positives. Si les distàncies són cap a l'esquerra, aquestes seran negatives. Aquest criteri és per a totes les lents i per a totes les distàncies que intervinguin en un problema d'òptica.

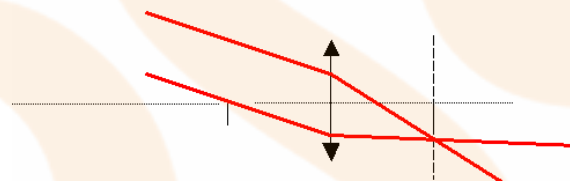
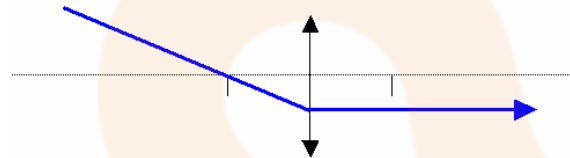
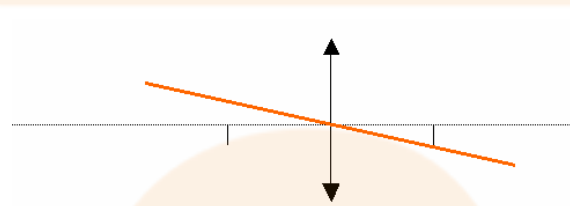
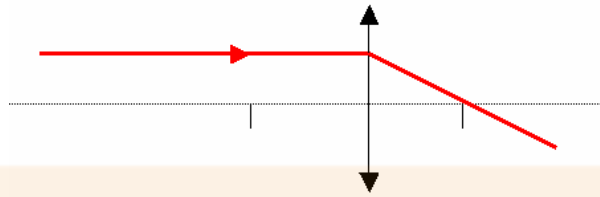
Així doncs veiem que la focal f' en una lent convergent és positiva ($f' > 0$), mentre que en una lent divergent la focal f' és negativa. ($f' < 0$)

Representació gràfica de la formació d'imatges.

En aquest apartat aprendreu a obtenir la formació d'imatges a partir de la posició d'un objecte i d'una lent coneguda. Per poder obtenir la imatge heu de tenir en compte una sèrie de regles bàsiques.

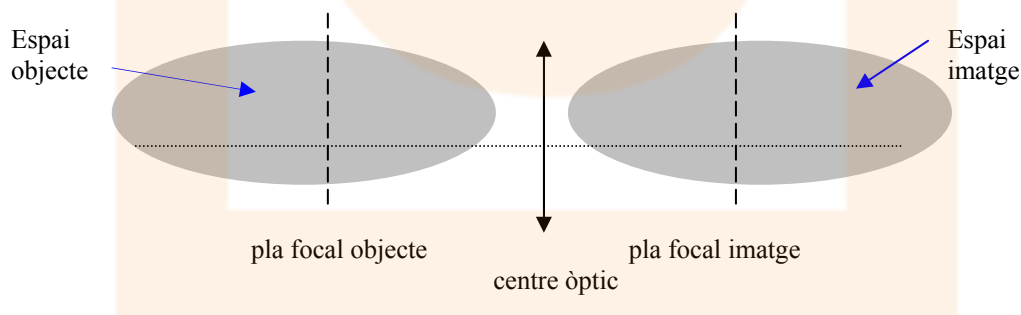
1. Tot raig paral·lel a l'eix del sistema i que prové de l'objecte, en travessar la lent passarà pel focus imatge.
2. Tot raig que travessi la lent pel seu punt central (O.) continuarà el seu camí de forma invariant.

3. Tot raig que prové de l'objecte i passa pel focus objecte , en travessar la lent sortirà paral·lel a l'eix del sistema.
4. Dos raigs paral·lels i que formin un cert angle amb l'eix del sistema, en travessar la lent coincidirán en un punt del pla focal.



Abans però també cal conèixer les parts d'un sistema òptic centrat.

Parts d'un sistema òptic.

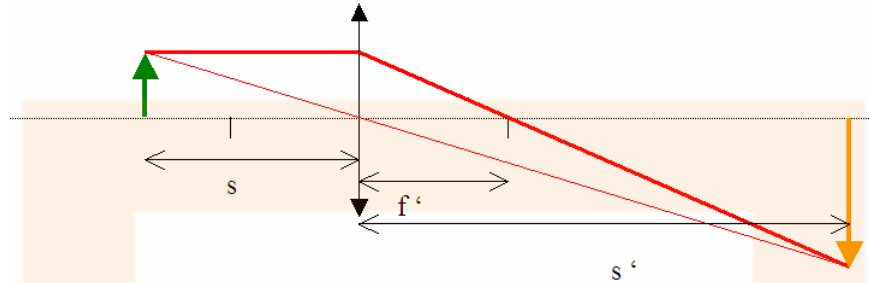


Si l'objecte es troba a l'espai objecte parlarem d'**objecte real**. Si es troba a l'espai imatge parlarem d'**objecte virtual**.

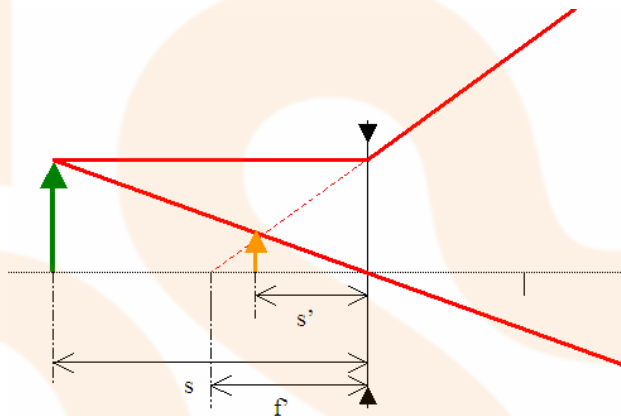
Si la imatge es forma a l'espai imatge parlarem d'**imatges reals**. Si la imatge es forma a l'espai objecte parlarem d'**imatges virtuals**.

Exemples

Considereu una lent convergent com la de la figura. Els objectes sempre els representarem per una fletxa vertical. L'objecte es projectarà a través de la lent per formar una imatge. Podem representar aquest procés si seguim les regles anteriors.



Amb una lent divergent...



Potència d'una lent.

Entenem per potència d'una lent, l'invers de la distància focal d'aquesta.

$$C = \frac{1}{f'}$$

La potència d'una lent es mesura en m^{-1} o diòptries.

Càlcul per determinar la posició i la mida de les imatges.

Per poder determinar el valor de s' conegut el vaor de s aplicarem l'equació de Gauss.

$$-\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'}$$

Aquesta equació és vàlida quan estem dins de l'òptica paraxial, és a dir que els raigs han de formar angles petits amb l'eix del sistema. Com podem veure, n i n' són els índex de refracció dels medis objecte i imatge, s i s' són les posicions (positives o negatives) de l'objecte i de la imatge a la lent. f' és la distància focal imatge de la lent.

Augments.

Podem definir diferents tipus d'augment en funció de la relació de magnituds que intervenen.

- *Augment lateral*: Relació entre les altures de l'objecte i de la imatge.

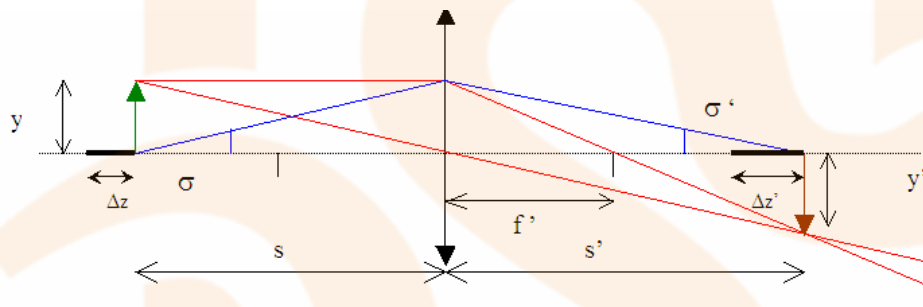
$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

- *Augment axial*: Relació entre les profunditats imatge i objecte.

$$\alpha = \frac{\Delta z'}{\Delta z}$$

- *Augment angular* :

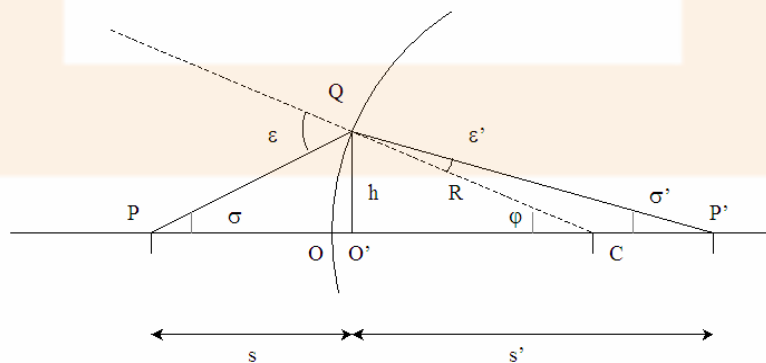
$$\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma}$$



MIRALLS.

Per poder explicar la formació d'imatges a través dels miralls primer ens cal entendre com es formen les imatges a partir d'un diòptre esfèric.

Considerem una esfera amb un índex de refracció n' submergida dins d'un medi d'índex n . Un raig que prové del punt P incidirà en el punt Q amb un angle ε respecte la normal (radi). El raig es refractarà amb un angle ε' per projectar-se en el punt P' .



Si apliquem la llei d'Snell.

$$n \cdot \sin \varepsilon = n' \cdot \sin \varepsilon'$$

i tenint en compte que estem dins de l'òptica paraxial (angles petits) podem aproximar els sinus i les tangents dels angles pels mateixos angles.

$$\sin \varepsilon = \varepsilon$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon$$

$$\sin \varepsilon' = \varepsilon'$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon' = \varepsilon'$$

A partir del dibuix podem establir les següents relacions amb els angles i els seus sinus.

$$\varepsilon = \varphi + \sigma \quad ; \quad \varepsilon' = \varphi - \sigma'$$

$$\varphi \approx \sin \varphi = \frac{h}{R}; \sigma \approx \operatorname{tg} \sigma = -\frac{h}{s}; \sigma' \approx \operatorname{tg} \sigma' = \frac{h}{s'}$$

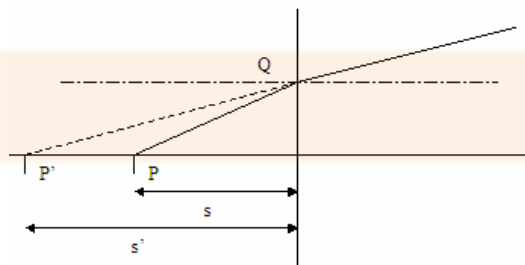
Si apliquem la llei d'Snell, amb l'aproximació paraxial, tenim:

$$\begin{aligned} n \cdot \sin \varepsilon &= n' \cdot \sin \varepsilon' \Rightarrow n \cdot \varepsilon = n' \cdot \varepsilon' \Rightarrow n \cdot (\varphi + \sigma) = n' \cdot (\varphi - \sigma') \\ \Rightarrow n \cdot \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{s} \right) &= n' \cdot \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{s'} \right) \Rightarrow n \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s} \right) = n' \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s'} \right) \Rightarrow \frac{n}{R} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{R} - \frac{n'}{s'} \\ \Rightarrow -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} &= \frac{n'}{R} - \frac{n}{R} \Rightarrow -\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{R} \end{aligned}$$

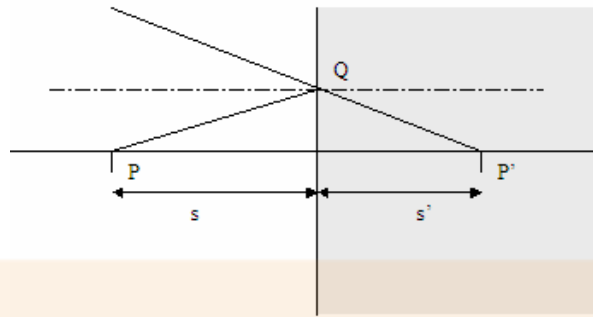
Si fem a $\frac{n' - n}{R} = \frac{1}{f'}$ veiem que aquest terme ens permet definir la focal d'una superfície esfèrica de radi R i índex n' .

En general el medi que tenim davant d'una superfície esfèrica serà aire ($n = 1$). n' definirà l'índex de refracció de la superfície esfèrica. Així imposant alguns valors per R i n' tenim alguns casos particulars de superfícies curioses de comentar.

- Superfície plana: ($R \rightarrow +\infty$) $\Rightarrow \frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \Rightarrow s' = s \cdot \frac{n'}{n}$

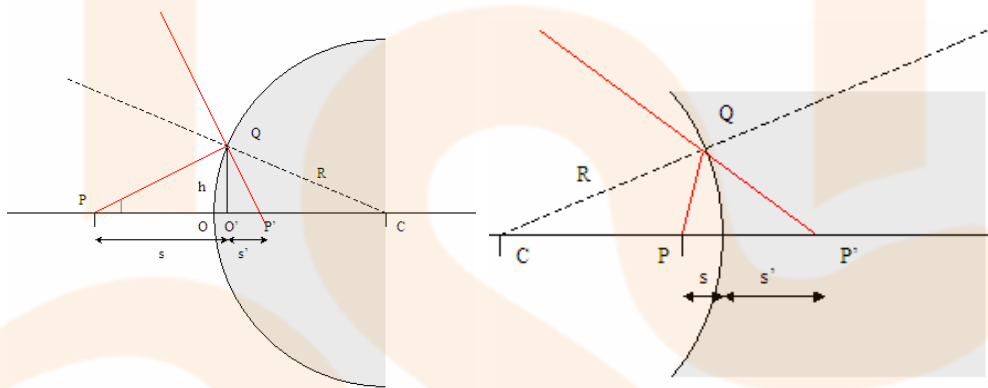


- Mirall pla : ($R \rightarrow +\infty$ i $n' = -n$) $\Rightarrow s' = -s$



- Mirall esfèric : ($n' = -n$) $\Rightarrow \frac{1}{s'} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{R}$

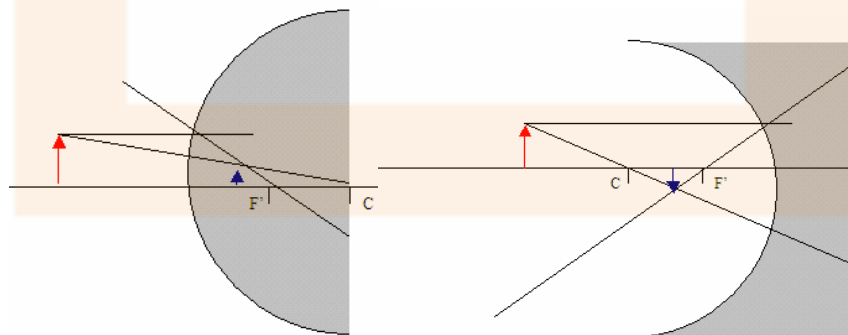
En aquest cas hem de distingir entre mirall *convex* ($R > 0$) i *còncav* ($R < 0$).



Formació gràfica d'imatges a través d'un mirall.

Per traçar els raigs i formar imatges en un mirall, aplicarem les dues regles bàsiques ja aplicades en les lents.

1. Tot raig paral·lel a l'eix del sistema i que prové de l'objecte, en reflectir-se en el mirall passarà pel focus imatge.
2. Tot raig que passi pel centre geomètric del mirall (C.) no es desviarà en la seva reflexió.



4.3. L'EFECTE DOPPLER.

Introducció.

Quan un tren s'acosta a una estació tocant la sirena, notem un canvi del to en el xiulet just en el moment que la locomotora passa pel davant. .

L'efecte anterior fou descobert pel físic austríac Christian Doppler l'any 1840. Posteriorment el francès Fizeau el va estendre a les ones electromagnètiques.

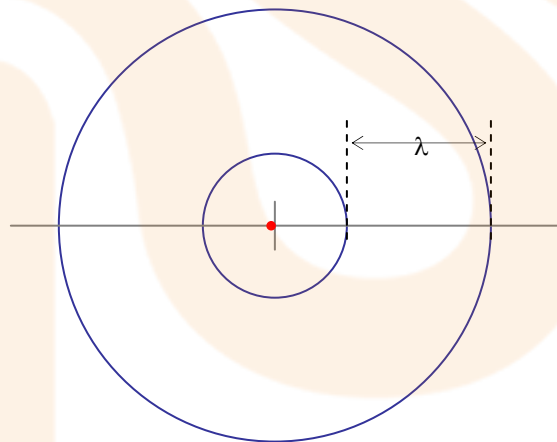
En aquest apartat tractarem diversos casos d'estudi de l'efecte Doppler.

1. Emissor mòbil i observador fix.
2. Emissor fix i observador mòbil.
3. Emissor i observador mòbils.

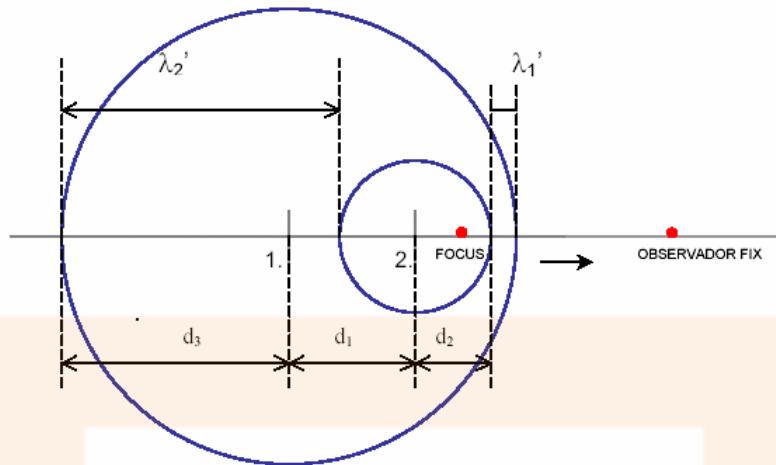
4.3.1. Emissor mòbil i observador fix.

Emissor acostant-se a l'observador.

Suposem un focus puntual que vibra amb una freqüència f en el medi material, emetent ones que es propaguen a velocitat v . Si el focus no es desplaça, la distància entre dues crestes d'ona consecutives és $\lambda = \frac{v}{f}$.



Suposem però que el focus es desplaça a una velocitat constant v_F ($0 < v_F < v$). En un cert instant de temps el focus emet un front d'ona F_1 . Al cap d'un període de temps T el focus emetrà un segon front d'ona F_2 . Cal tenir en compte que el focus s'ha mogut en aquest T una distància d_1 ($d_1 = v_F \cdot T$), i que per tant els dos fronts són emesos des de dos punts totalment diferents. Com podeu veure en el dibuix adjunt per davant del focus emissor els fronts d'ona es comprimeixen i per tant la longitud d'ona es contrau. L'efecte que es produeix és simple, apareix un efecte d'augment de la freqüència del so. En canvi per darrera la longitud d'ona s'aixampla i per tant apareix un efecte de disminució de la freqüència.



Si l'observador està per davant del focus, aquest notarà que dos fronts d'ona consecutius arriben amb un interval de temps menor i per tant sentirà una freqüència aparent major.

$$\left. \begin{aligned} d_1 + d_2 + \lambda'_1 &= v(t+T) \\ d_1 &= v_F \cdot T \\ d_2 &= vt \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_F \cdot T + vt + \lambda'_1 = v(t+T) \Rightarrow v_F \cdot T + vt + \lambda'_1 = vt + v \cdot T$$

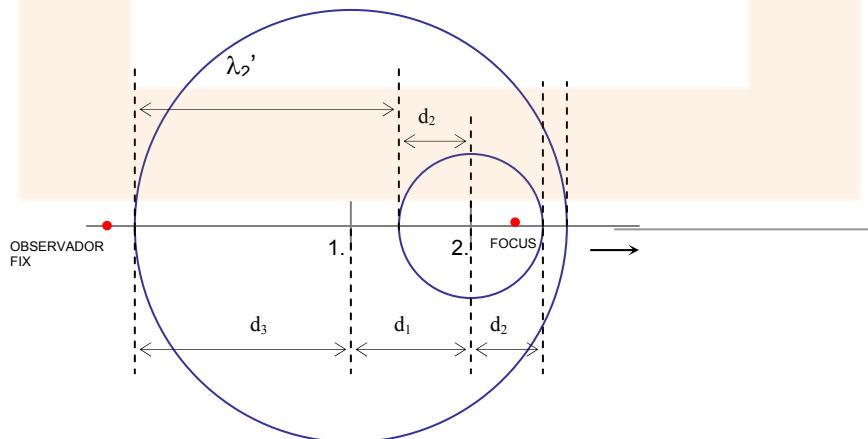
$$\Rightarrow v_F \cdot T + \lambda'_1 = vT \Rightarrow \lambda'_1 = (v - v_F) \cdot T$$

Com que la longitud d'ona aparent λ'_1 està relacionada amb la freqüència aparent a través de l'equació $\lambda'_1 \cdot f'_1 = v$, aïllant λ'_1 d'aquesta i substituint:

$$\left. \begin{aligned} \lambda'_1 &= (v - v_F) \cdot T \\ \lambda'_1 &= \frac{v}{f'_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v}{f'_1} = (v - v_F) \cdot \frac{1}{f} \Rightarrow f'_1 = \frac{v}{(v - v_F)} \cdot f$$

Emissor allunyant-se de l'observador.

Si el focus s'allunya de l'observador, aquest captarà dos fronts d'ona consecutius amb una diferència de temps major.



$$\left. \begin{array}{l} \lambda'_2 = d_3 + d_1 - d_2 \\ d_2 = vt \\ d_1 = v_F \cdot T \\ d_3 = v \cdot (t+T) \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda'_2 = v \cdot (t+T) + v_F \cdot T - vt \Rightarrow vt + v \cdot T + v_F \cdot T - vt = \lambda'_2 \Rightarrow \lambda'_2 = (v + v_F) \cdot T$$

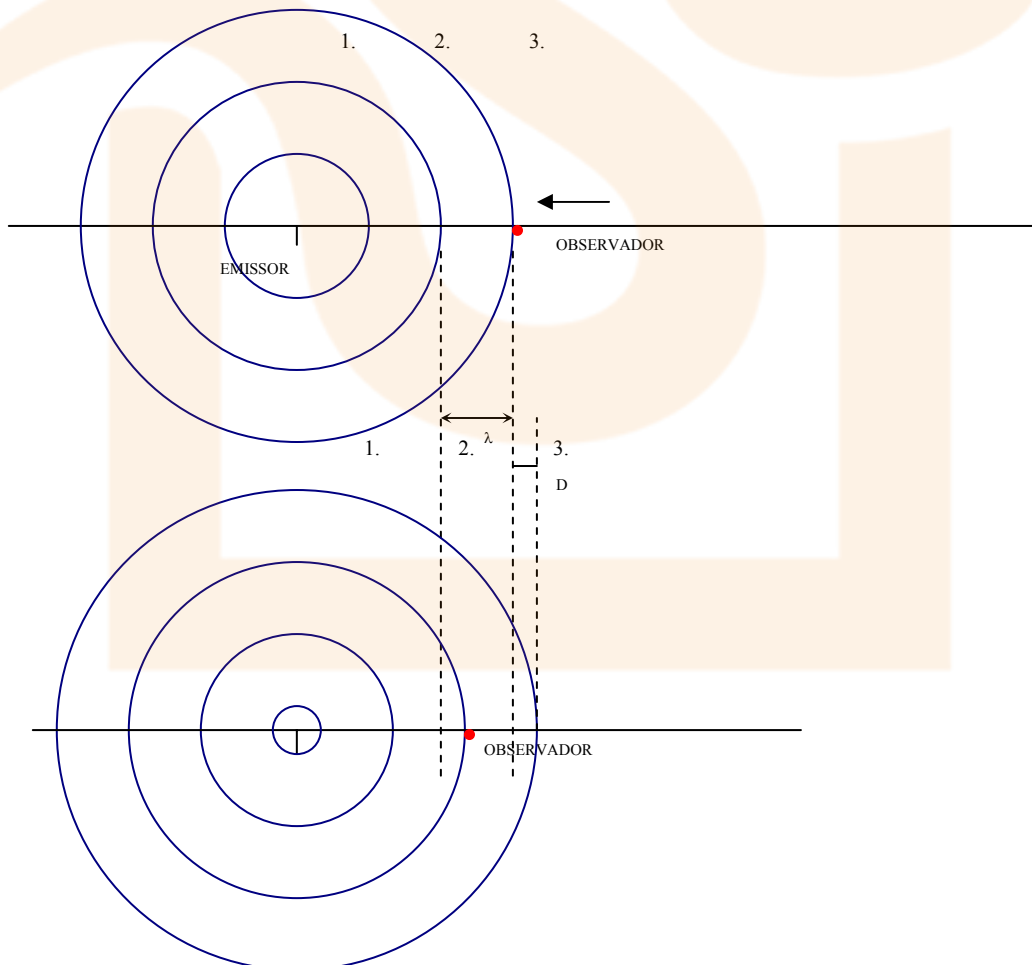
On λ'_2 està relacionada amb la freqüència aparent f'_2 a través de l'equació $\lambda'_2 \cdot f'_2 = v$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda'_2 = (v + v_F) \cdot T \\ \lambda'_2 = \frac{v}{f'_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{v}{f'_2} = (v + v_F) \cdot \frac{1}{f} \Rightarrow f'_2 = \frac{v}{(v + v_F)} \cdot f$$

Emissor fix i observador mòbil.

Observador acostant-se a l'emissor.

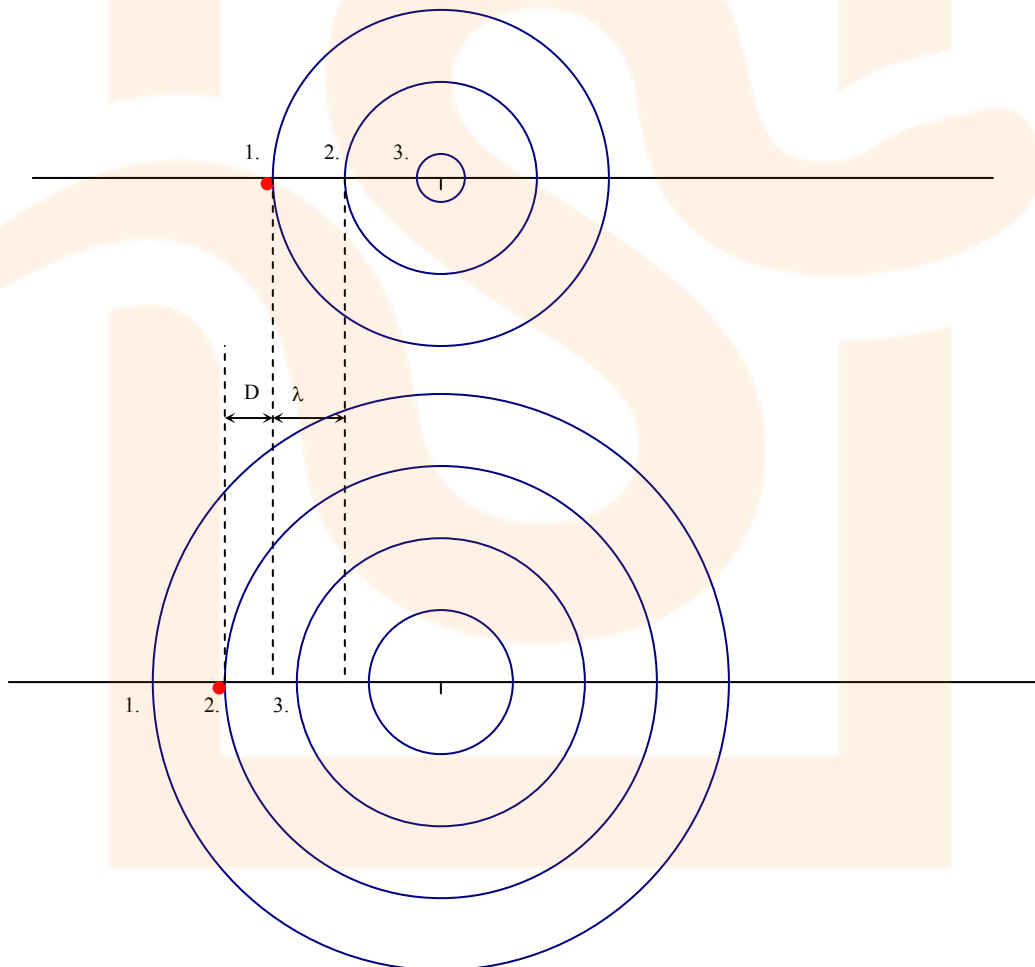
Un focus emissor emet ones amb una freqüència f que es propaguen a una velocitat v . Simultàniament un observador es mou cap a l'emissor amb velocitat v_o de manera que en el seu viatge travessa successivament els diferents fronts d'ona consecutius generats per l'emissor. El temps que triga l'observador en creuar dos fronts consecutius és T' i a més recorre la distància $\lambda - D$ per creuar-los. Aleshores veiem que l'ona avança D en el mateix temps.



$$\left. \begin{array}{l} D = v \cdot T' \\ \lambda - D = v_o \cdot T' \\ \lambda = v \cdot T \\ f' = \frac{1}{T'} \\ f = \frac{1}{T} \end{array} \right\} \Rightarrow vT - vT' = v_o \cdot T' \Rightarrow (v + v_o)T' = vT \Rightarrow \frac{1}{(v + v_o)T'} = \frac{1}{vT} \Rightarrow f' = \frac{v + v_o}{v} \cdot f$$

Observador allunant-se de l'emissor.

Ara l'observador s'allunya amb una velocitat v_o ($0 < v_o < v$) de l'emissor. Dos fronts d'ona consecutius trigaràn un temps T' en atrapar l'observador. En aquest temps l'ona avança una distància $D + \lambda$ i l'observador ha avançat D . Aleshores podem escriure:



$$\left. \begin{array}{l}
 \lambda + D = v \cdot T' \\
 D = v_o \cdot T' \\
 \lambda = v \cdot T \\
 f' = \frac{1}{T'} \\
 f = \frac{1}{T}
 \end{array} \right\} \Rightarrow v \cdot T + v_o \cdot T' = v \cdot T' \Rightarrow (v - v_o) \cdot T' = v \cdot T \Rightarrow \frac{1}{(v - v_o) \cdot T'} = \frac{1}{v \cdot T} \Rightarrow f' = \frac{v - v_o}{v} \cdot f$$

Emissor mòbil i observador mòbil.

Quan hi ha moviment simultani de l'emissor i de l'observador, aleshores les fórmules anteriors es combinen obtenint les següents relacions per a cada un dels casos possibles.

Emissor i observador acostant-se mútuament.

$$f' = \frac{v + v_o}{v - v_F} \cdot f$$

L'emissor perseguint l'observador.

$$f' = \frac{v - v_o}{v - v_F} \cdot f$$

L'observador persegueix l'emissor.

$$f' = \frac{v + v_o}{v + v_F} \cdot f$$

Emissor i observador allunyant-se mútuament.

$$f' = \frac{v - v_o}{v + v_F} \cdot f$$