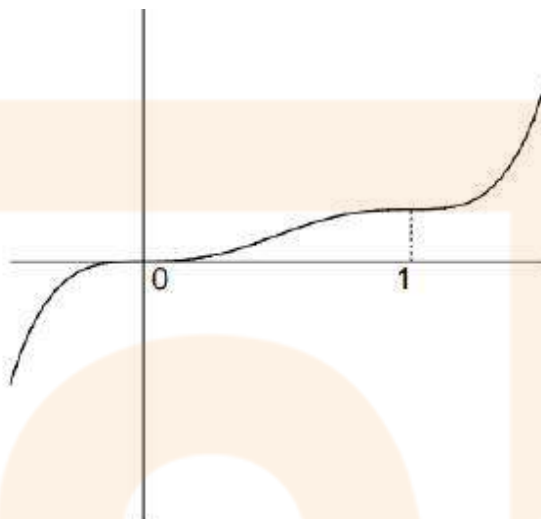


RESOLUCIÓ PROBLEMES PAU ANÀLISI I (2005-2009)

1. Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.



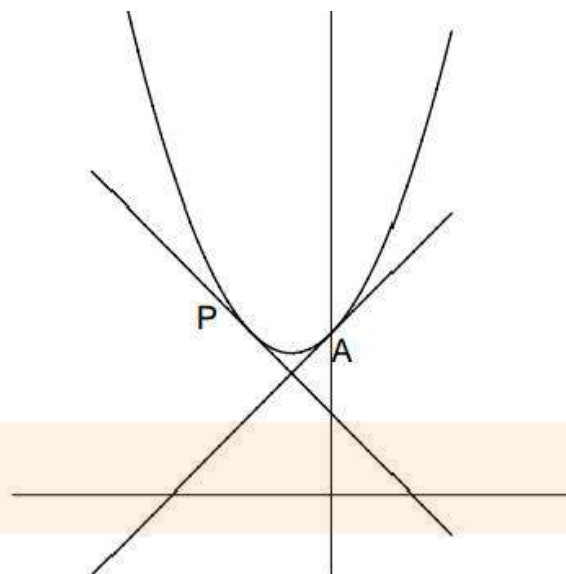
Resolem $f'(x) = 0$:

$$30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 0 \Leftrightarrow 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 30x^2(x-1)^2 = 0.$$

Les arrels són $x = 0$; $x = 1$, cada una doble. Per classificar màxims i mínims, podem fer servir els signes de f' al voltant de cada un dels punts candidats a màxim o mínim. En aquest cas, com que $f'(x) = 30x^2(x-1)^2 \geq 0$ per a tot x , la funció és sempre creixent i, per tant, no hi ha ni màxims ni mínims. El criteri de la derivada segona també es pot fer servir: $f''(x) = 120x^3 - 180x^2 + 60x = 60x(2x^2 - 3x + 1)$. Tenim que $f''(0) = 0$ i $f''(1) = 0$. Per tant, hem de calcular la derivada tercera, $f'''(x) = 360x^2 - 360x + 60 = 60(6x^2 - 6x + 1)$. Tenim $f'''(0) \neq 0$ i $f'''(1) \neq 0$, en conseqüència, tant a $x = 0$ com a $x = 1$ no hi ha màxims i mínims sinó que hi ha punts d'inflexió.

2. Sigui la paràbola $y = 2x^2 + x + 1$ i sigui A el punt de la paràbola d'abscissa 0.

- Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt A.
- En quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?



- a) [1 punt] El punt A té coordenades $(0,1)$. El pendent de la recta tangent serà $y'(0) = 1$. La recta tangent és $y - 1 = x$.
- b) [1 punt] La recta tangent en un punt qualsevol $(a, 2a^2 + a + 1)$ té pendent $y'(a) = 4a + 1$. Per tal que aquesta recta sigui perpendicular a la de l'apartat a) que té pendent 1, s'ha de complir que $1 \cdot (4a + 1) = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$. El punt demanat, P , té coordenades $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

3. Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$.

El domini de la funció és $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

La funció té per asímptota vertical la recta $x = 1$, corresponent a la discontinuïtat. D'altra banda,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - x} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x + 1}{x - 1} = -3.$$

Per tant, $y = x - 3$ és una asímptota obliqua a dreta i esquerra.

4. Considereu la funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.
- Calculeu c sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x = 0$ és horitzontal.
 - Per al valor de c trobat a l'apartat anterior, calculeu a i b sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -2$ i que talla l'eix OX quan $x = 1$.
 - Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

a) La condició equival a demanar $f'(0) = 0$. Com que $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$, llavors $c = 0$.

b) La condició d'extrem relatiu a $x = -2$ és $f'(-2) = 0$, és a dir, $-32 + 12a - 4b = 0$.

La de tall a l'eix OX quan $x = 1$ correspon a $f(1) = 0$ i, per tant, $1 + a + b + 7 = 0$.

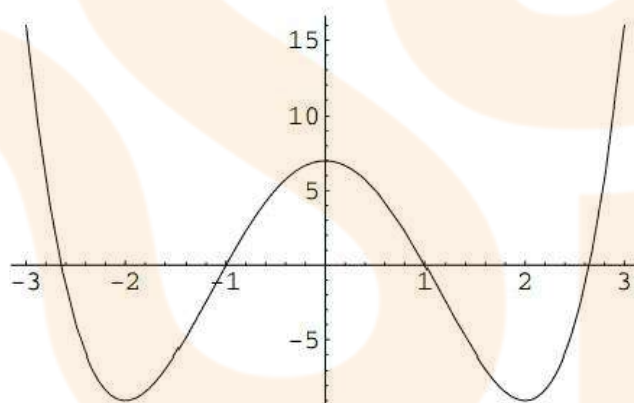
Per tot això, cal resoldre $\begin{cases} 3a - b = 8 \\ a + b = -8 \end{cases}$ que té per solució $a = 0, b = -8$.

c) Els càlculs anteriors condueixen a $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$, que té per derivada $f'(x) = 4x^3 - 16x$. Per trobar els extrems relatius es resol $f'(x) = 0$ que té per solucions $x = 0, x = -2, x = 2$. La derivada és positiva a $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ i la funció creix en aquesta regió. La funció decreix en els intervals en què la derivada és negativa, és a dir, dins $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

Considerant els signes de la derivada, es pot afirmar que a $x = -2$ i a $x = 2$ hi ha mínims relatius, mentre que a $x = 0$ es troba un màxim.

Màxim relatiu: $(0, 7)$. Mínims relatius: $(-2, -9)$, $(2, -9)$.

La gràfica és



5. Considereu la funció definida per $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x = 0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

En primer lloc es calcula la derivada de la funció, $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$. Ara només resta calcular $f'(0)$, que proporciona un pendent igual a -1 .

Per veure si hi ha altres punts, cal resoldre $\frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2} = -1$ que, operant, es transforma en l'equació

de segon grau $2x^2 + 4x = 0$. Les solucions són $x = -2$ i $x = 0$. Aquest últim és el punt estudiat a la primera part de la qüestió.

6. Donada la funció $f(x) = e^{-x^2+2x}$.
- Trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos.
 - Trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius.
 - Trobeu les possibles asímptotes.
 - Feu la representació gràfica aproximada de la funció.

a) El domini de la funció és tot $\mathbb{R}$.

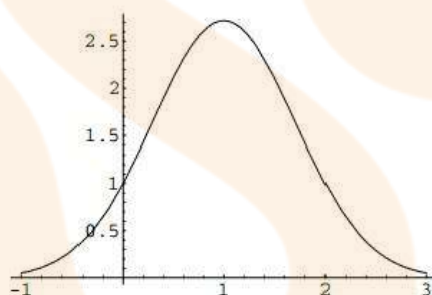
Com que $e^{-x^2-2x} = 0$ no té solució, la funció no talla l'eix horitzontal.

Donat que $f(0) = 1$, la funció talla l'eix vertical en el punt $(0, 1)$.

b) La derivada és $f'(x) = e^{-x^2+2x}(-2x+2) = 2e^{-x^2+2x}(1-x)$. Llavors, la derivada només s'anul·la quan $x = 1$. Per qualsevol valor de x inferior a 1 la derivada és positiva i en qualsevol superior és negativa; per tant, la funció creix a $(-\infty, 1)$, decreix a $(1, \infty)$ i, com a conseqüència, el punt $(1, e)$ és un màxim relatiu.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2+2x} = 0$. Per això $y = 0$ és asímptota horitzontal en ambdós costats. La funció no té altres asímptotes.

d) La representació gràfica és



7. Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = e^x(ax+b)$, on a i b són nombres reals.
- Calculeu els valors de a i b per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(3, e^3)$.
 - Per als valors de a i b obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.

a) Si en el punt $(3, e^3)$ hi ha un extrem relatiu, sabem dues coses: $f(3) = e^3$ i $f'(3) = 0$. La derivada de la funció és $f'(x) = e^x(ax + b + a)$; llavors, ens queda

$$\begin{cases} f(3) = e^3 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^3(3a + b) = e^3 \\ e^3(4a + b) = 0 \end{cases}$$

Com que $e^3 \neq 0$, el sistema a resoldre és

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

que té com a solució $a = -1$ i $b = 4$.

b) La derivada segona és $f''(x) = e^x(2 - x)$. Trobem el seu signe quan s'avalua en $x = 3$: $f''(3) = -e^3 < 0$. Per tant, en $x = 3$ hi ha un màxim.

8. Calculeu els valors del paràmetre a , $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.

Primerament es calculen les derivades primera i segona de la funció $f(x) = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ que defineix la corba donada.

$$f'(x) = 4ax^3 + 6ax^2 - a, \quad f''(x) = 12ax^2 + 12ax.$$

La condició de punt d'inflexió és que la derivada segona s'anul·li,

$$12ax^2 + 12ax = 0 \rightarrow 12ax(x + 1) = 0,$$

que proporciona les solucions $x = 0$ i $x = -1$. En tots dos casos es pot comprovar que la derivada tercera no és nul·la i, per tant, corresponen a abscisses de punts d'inflexió.

Els pendents de les rectes tangents en els punts d'inflexió valen

$$f'(0) = -a \text{ i } f'(-1) = a.$$

Si les rectes han de ser perpendiculars s'ha de verificar que el producte dels seus pendents valgui -1 , és a dir

$$-a \cdot a = -1 \rightarrow a = \pm 1.$$

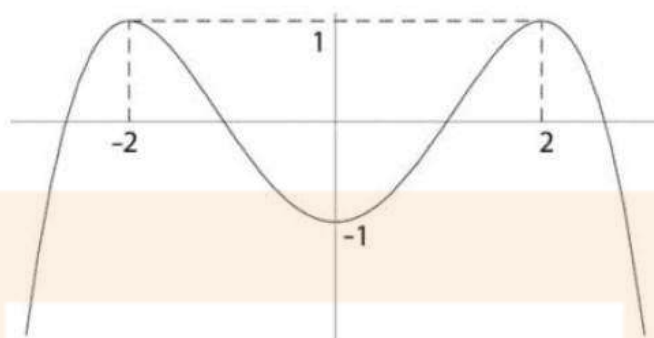
9. En quin punt la recta tangent a la funció $f(x) = x \cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriu l'equació de la recta tangent en aquest punt.

La recta tangent serà horitzontal quan la derivada valgui zero. Per tant

$$f'(x) = e^x + xe^x = 0 \rightarrow e^x(x + 1) = 0 \rightarrow x = -1.$$

Llavors, quan $x = -1$ la tangent és horitzontal i donat que $f(-1) = -e^{-1}$, el punt de tangència és $(-1, -e^{-1})$ i la recta tangent demanada té per equació $y = -e^{-1}$, o bé $y = -\frac{1}{e}$.

10. Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval $(-3, 3)$ és la següent:



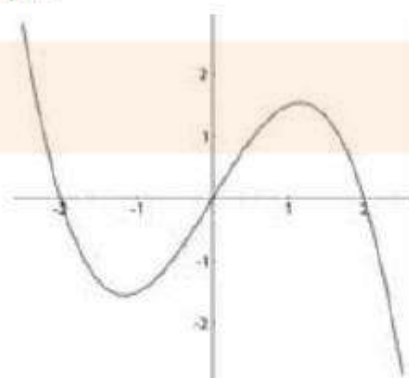
- Determineu les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.
- Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval $(-3, 3)$.
- Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.
- Sabent que la funció és de la forma $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, trobeu de quina funció es tracta.

- És fàcil observar que els màxims relatius es troben quan $x = -2$ i $x = 2$. El mínim relatiu té abscissa $x = 0$.
- D'acord amb la gràfica, la funció és
 - creixent a $(-3, -2) \cup (0, 2)$.
 - decreixent a $(-2, 0) \cup (2, 3)$.

Gràficament,

$(-3, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$

- La gràfica de la derivada és



- d) Sabem que $f(-2) = 1$, $f(2) = 1$, $f'(-2) = 0$, $f'(2) = 0$, $f'(0) = 0$ i $f(0) = -1$. És a dir, tenim el sistema lineal

$$\left. \begin{array}{l} 16a + 4b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 1 \\ -32a - 4b = 0 \\ 32a + 4b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right\} \text{ que té per solucions } a = -1/8, b = 1 \text{ i } c = -1.$$

O sigui, que la funció és $f(x) = -x^4/8 + x^2 - 1$.

11. Trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Per a què la funció sigui contínua en el punt $x = 2$, cal que els límits laterals existeixin, coincideixin i siguin iguals al valor de la funció en el punt.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 2x + 3) = 4a + 7; \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 + bx + 5) = 13 + 2b. \\ f(2) &= 13 + 2b \end{aligned}$$

Així, ens queda que la funció és contínua en $x = 2$ si i sol si $4a + 7 = 13 + 2b$.

Per estudiar la derivabilitat, busquem les derivades laterals en el punt 2,

$$f'_-(x) = 2ax + 2 \Rightarrow f'_-(2) = 4a + 2; \quad f'_+(x) = 3x^2 + b \Rightarrow f'_+(2) = 12 + b.$$

La funció és derivable en el punt $x = 2$, si i sol si $4a + 2 = 12 + b$. Arribem així al sistema

$$\begin{cases} 4a - 2b = 6 \\ 4a - b = 10 \end{cases}$$

que té per solució $a = \frac{7}{2}$, $b = 4$.

12. Digueu per a quin valor de x la recta tangent a la corba $y = \ln(x^2 + 1)$ és paral·lela a la recta $y = x$. Escriviu l'equació d'aquesta tangent.

El pendent de la recta tangent ha de valer 1. Per tant, cal igualar la derivada de la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ a aquest valor.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

L'equació de la recta tangent és $y = x - 1 + \ln(2)$.

13. Considereu la funció $f(x) = ax^2 + x + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Trobeu els valors de a i b que fan que la recta $y = 2x + 1$ sigui tangent a la gràfica de f quan $x = 1$.

Si la recta donada és tangent a la gràfica de la funció f , es pot assegurar que $f(1) = y(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. A més a més, $f'(1) = 2$. Utilitzant aquestes dues igualtats, i observant que $f'(x) = 2ax + 1$, s'arriba al sistema

$$\begin{cases} a + b + 1 = 3 \\ 2a + 1 = 2 \end{cases}$$

que té per solució $a = \frac{1}{2}$ i $b = \frac{3}{2}$.

14. Donades les funcions $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ i $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$:

- Comproveu que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.
- Comproveu també que $f'(x) = g(x)$ i $g'(x) = f(x)$.
- Comproveu que $f(x + y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$.
- Calculeu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dividint per e^x el numerador i el denominador; amb un procediment similar (però no igual), trobeu $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

- a) Es tracta simplement de fer les operacions indicades,

$$\begin{aligned} [g(x)]^2 - [f(x)]^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{4e^{x-x}}{4} = \frac{4 \cdot 1}{4} = 1 \end{aligned}$$

- b) Recordant les propietats de la derivada, tenim

- $Df(x) = D\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{D(e^x - e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = g(x)$
- $Dg(x) = D\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \frac{D(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x)$

- c) Observem que $f(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$. Intentarem arribar a aquesta expressió fent els càlculs del membre de la dreta de la igualtat

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{y+x} + e^{y-x} - e^{-y+x} - e^{-y-x}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = f(x+y). \end{aligned}$$

- d) El càlcul d'aquests límits no es pot fer utilitzant la regla de l'Hôpital degut a què la derivada de la funció exponencial és ella mateixa. La forma de calcular-los consisteix en dividir numerador i denominador pel factor adequat (aquell que fa que el quocient sigui una indeterminació del tipus ∞/∞). Així,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x}}{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x}}}{\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

15. Sigui $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$. Donades les rectes $r_1: y = x + 2$ i $r_2: y = 7x - 2$:

- a) Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes pot ser tangent a la corba $y = f(x)$ en algun punt.
b) En cas que alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.

a) Una recta i una corba són tangents en un punt si les dues passen pel punt i tenen el mateix pendent en ell. El pendent de la corba en un punt és el valor de la derivada de la funció en el punt. Calculem aquesta derivada: $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$.

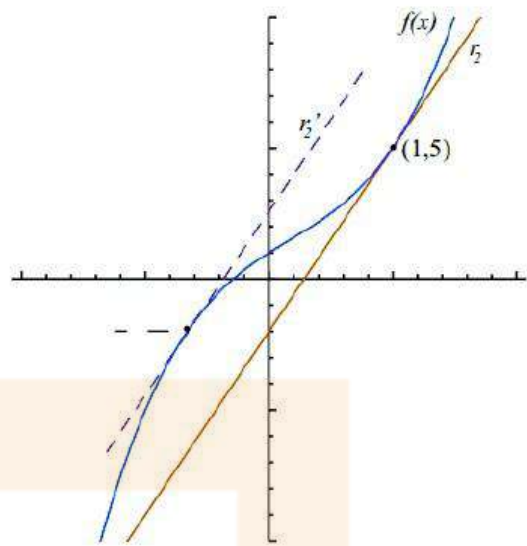
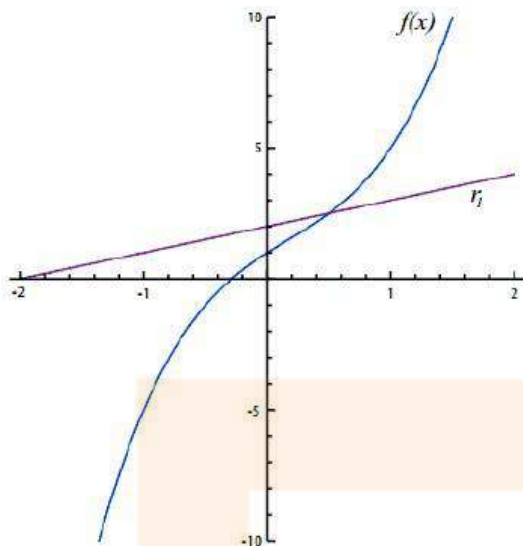
La recta r_1 pot ser tangent a la corba si i sol si existeix algun valor de x per al qual $f'(x) = 1$ (que és el valor del pendent de r_1). Com que l'equació $6x^2 - 2x + 3 = 1$ no té solucions (reals), la recta r_1 no pot ser tangent a la gràfica de $f(x)$.

Paral·lelament, la recta r_2 pot ser tangent a la corba si i sol si l'equació $6x^2 - 2x + 3 = 7$ té alguna solució. Com és fàcil veure, aquesta equació admet com a solucions $x = 1$ i $x = -2/3$. Per tant, la recta r_2 pot ser tangent a la gràfica de $f(x)$.

b) Per $x = 1$, la funció val $f(1) = 2 - 1 + 3 + 1 = 5$ i la recta r_1 , $y = 7 - 2 = 5$; o sigui, tant la corba com la recta passen pel punt $(1, 5)$. Aquest és el punt de tangència.

Per $x = -2/3$ tenim que $f(-2/3) = -55/27$ i $y(-2/3) = -20/3$, la qual cosa indica que la recta i la corba, en aquest cas, no són tangents.

Les següents gràfiques il·lustren la situació de la funció i de les rectes donades.



En la de l'esquerra tenim la posició de la funció $f(x)$ i r_1 , veient-se clarament que no poden ser tangents. En la de la dreta, la recta r_2 és tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt $(1, 5)$; la recta r_2' és paral·lela a r_2 (és a dir, té el mateix pendent) passant pel punt $(-2/3, -55/27)$, però, evidentment, no és r_2 .

16. Considereu la funció real de variable real $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$.

- Trobeu-ne el domini.
- Calculeu l'equació de les seves asímptotes, si en té.
- Estudieu-ne els intervals de creixement i de decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, i classifiqueu-los.

a) No són del domini solament els valors de la variable x que anul·len en denominador. Per tant, $\text{Dom}f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

b) *Asímptotes verticals.* Com que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty,$$

podem assegurar que la recta $x = -1$ és una asímptota vertical. Paral·lelament, es comprova que $x = 1$ també és una asímptota vertical.

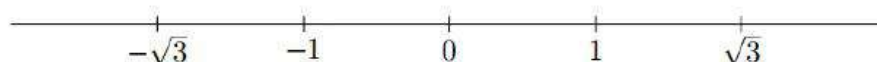
Asímptota horitzontal. El fet de què $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (ja que el grau del numerador és major que el grau del denominador), ens assegura que no hi ha asímptota horitzontal.

Asímptota obliqua. És de la forma $y = mx + b$ amb $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ i $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$. En el nostre cas,

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = 2; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 1} - 2x \right) = 0.$$

Així, tenim asímptota obliqua, d'equació $y = 2x$.

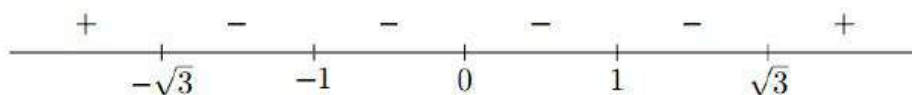
c) La derivada de la funció és $f'(x) = \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2 - 1)^2}$, que val zero quan $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ o $x = \sqrt{3}$. Marquem, a la recta real, els punts que anul·len la primera derivada i els que no són del domini,



Així, la recta real queda dividida en sis intervals: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, +\infty)$. Busquem el signe de la primera derivada en un punt de cada un d'aquests intervals,

$$f'(-2) > 0; f'(-1,5) < 0; f'(-0,5) < 0; f'(0,5) < 0; f'(1,5) < 0; f'(2) > 0.$$

L'esquema de signes per la primera derivada és



Per tant, la funció $f(x)$

- és creixent a $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$;
- és decreixent a $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$;
- té un màxim quan $x = -\sqrt{3}$;
- té un mínim quan $x = \sqrt{3}$.

Encara que en el problema no es demana, la gràfica d'aquesta funció (amb indicació de les asímptotes) és, aproximadament,

