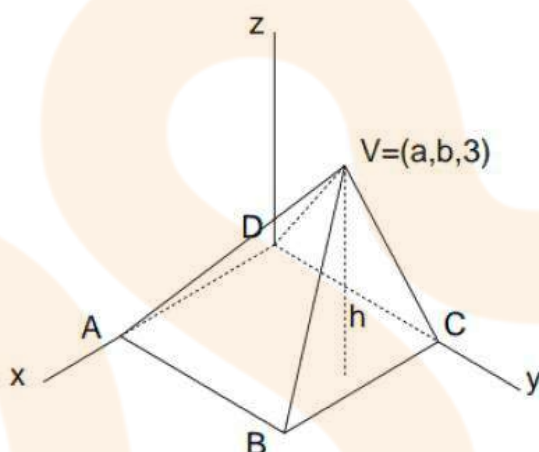


RESOLUCIÓ PROBLEMES PAU GEOMETRIA (2005-2009)

1. Una piràmide de base quadrada té el vèrtex en el pla d'equació $z = 3$. Tres dels vèrtexs de la base són els punts del pla OXY : $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ i $C = (0, 1, 0)$.
- a) Feu un gràfic dels elements del problema. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la base, D ?
- b) Quin és el volum de la piràmide? $\left[\text{Volum} = \frac{\text{àrea base} \times \text{altura}}{3} \right]$
- c) Si el vèrtex de la piràmide és el punt $V = (a, b, 3)$, quina és l'equació de la recta que conté l'altura sobre la base?

a) [1 punt]



El vèrtex $D = (0, 0, 0)$.

- b) [1 punt] El volum de la piràmide serà $\text{Vol} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$ on S és l'àrea de la base i

h l'altura sobre aquesta base. En el nostre cas, la base és un quadrat de costat 1, per tant, $S = 1$ i el vèrtex de la piràmide, V , està sobre el pla $z = 3$ que és paral·lel al pla de la base, $z = 0$. La distància del vèrtex al pla de la base és doncs (independentment del lloc on es trobi el vèrtex) $h = 3$. Tenim doncs que

$$\text{Vol} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1 \text{ unitat de volum.}$$

- c) **[2 punts]** Del vèrtex de la piràmide, V , només sabem que està sobre el pla $z = 3$. Per tant el vèrtex és $V = (a, b, 3)$ i a i b són valors que no podem precisar. L'equació demanada serà la d'una recta que passa pel punt $(a, b, 3)$ i és perpendicular al pla $z = 0$, o sigui que té per vector director $(0, 0, 1)$. La recta demanada té per equació contínua $\frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-3}{1}$. L'equació general és:

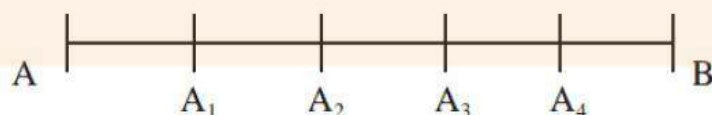
$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

2. Trobeu la distància entre la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi: 2x - 3y + 3z + 5 = 0$.

SOLUCIÓ [2 punts] Trobem primer la posició relativa de la recta i el pla. Com que el vector normal del pla $\vec{n} = (3, 4, 0)$ i el vector director de la recta, $\vec{v} = (4, -3, 3)$ tenen producte escalar, $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, resulta que la recta és o bé paral·lela al pla, o està continguda en ell. Com que el punt de la recta $(3, 1, -2)$ no pertany a π , $(3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 7 \neq 0)$, r i π són paral·lels. La distància entre la recta i el pla serà la de qualsevol punt de la recta al pla. La distància de $(3, 1, -2)$ (per exemple) al pla és:

$$\frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 7}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ unitats.}$$

3. Un segment d'origen en el punt $A = (-1, 4, -2)$ i extrem en el punt B està dividit en cinc parts iguals mitjançant els punts de divisió A_1, A_2, A_3 i A_4 (vegeu la figura). Si sabem que $A_2 = (1, 0, 2)$, quines són les coordenades de B ?



SOLUCIÓ [2 punts] . És clar que $\overline{AB} = 5 \cdot \overline{AA_1}$ i que

$$\overline{AA_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AA_2} = \frac{1}{2} \cdot (1+1, 0-4, 2+2) = (1, -2, 2).$$

Per tant, $\overline{AB} = 5 \cdot (1, -2, 2) = (5, -10, 10)$.

Les coordenades de B són $(-1+5, 4-10, -2+10) = (4, -6, 8)$.

4. Considereu els vectors de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = (-1, 3, 4), \vec{v}_2 = (2, -1, -3) \quad \text{i} \quad \vec{v}_3 = (1, 2k + 1, k + 3).$$

- a) Trobeu l'únic valor de k per al qual aquests vectors **no** són una base de $\mathbb{R}^3$.
b) Per a un valor de k diferent del que heu trobat en l'apartat a), quins són els components del vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$?

a) **[1 punt]** Tres vectors de $\mathbb{R}^3$ no són base si no són linealment independents. Això passarà quan el determinant format pels tres vectors valgui 0:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{vmatrix} = 5k - 15 = 0 \Leftrightarrow k = 3.$$

Al mateix resultat s'arriba imposant que el rang de la matriu formada pels tres vectors, no sigui 3:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+4 & k+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 2k+4 & k+7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2k+4 & k+7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -k+3 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punt]** Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ és una base, el vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ té clarament els components $(1,1,1)$.

5. Trobeu la distància entre la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi: 2x - 3y + 3z + 5 = 0$.

SOLUCIÓ [2 punts] Primer de tot estudiem la posició relativa de recta i pla. Observem que el vector director de la recta, $(2, -3, 3)$, és el vector normal del pla! Per tant, la recta és perpendicular al pla. La distància de la recta al pla és, doncs, 0.

6. Donats els punts $A = (1, 0, 0)$ i $B = (0, 0, 1)$:

- a) Trobeu un punt C sobre la recta d'equació paramètrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ que faci que el triangle ABC sigui rectangle en C .
- b) Trobeu l'àrea del triangle ABC .

- a) **[1 punt]** El punt $C = (1, 1 + \lambda, 1 + \lambda)$. Per tal que el triangle ABC sigui rectangle en C , els vectors $\overrightarrow{CA} = (0, -1 - \lambda, -1 - \lambda)$ i $\overrightarrow{CB} = (-1, -1 - \lambda, -\lambda)$ han de ser ortogonals, és a dir

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (1 + \lambda)^2 + \lambda(1 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1; \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Això ens dóna dos punts solució: $C = (1, 0, 0)$ i $C = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. El primer punt, clarament és igual a A i fa que no hi hagi cap triangle. La única solució és, doncs, $C = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

- b) **[1 punt]** Els catets del triangle seran $\overrightarrow{CA} = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ i $\overrightarrow{CB} = \left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

L'àrea serà, doncs, $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ unitats d'àrea.

7. Trobeu les coordenades dels punts situats sobre la recta d'equació $(x, y, z) = (-1, 1, 1) + t \cdot (1, 2, 1)$ que estan a distància 1 del pla $2x + 2y + z = 5$.

Un punt qualsevol de la recta és $(t - 1, 2t + 1, t + 1)$. Imposar que es troba a distància 1 del pla equival a fer

$$\left| \frac{2(t - 1) + 2(2t + 1) + t + 1 - 5}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \right| = 1$$

Ara només resta resoldre $\frac{7t - 4}{3} = \pm 1$, resultant $t = 1$ i $t = 1/7$. Així els punts buscats són

$$(0, 3, 2) \text{ i } \left(-\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{8}{7}\right).$$

8. Una recta r passa pel punt $A = (3,0,2)$ i té la direcció del vector $(-1,1,4)$.
- Trobeu quin angle forma r amb el pla horitzontal.
 - Comproveu que no passa pel punt $B = (1,3,10)$.
 - Trobeu l'equació de la recta que passa per A i B .

a) Se sap que el sinus de l'angle α que forma el vector $(-1,1,4)$ amb el pla horitzontal, és a dir, $z = 0$, s'obté de fer

$$\sin \alpha = \cos(90 - \alpha) = \frac{(-1,1,4) \cdot (0,0,1)}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}},$$

que també serveix per trobar el cosinus de l'angle complementari. Llavors, $\alpha = 70.529^\circ = 1.231 \text{ rad}$.

b) El vector $\vec{v}$ que uneix els punts A i B és $\vec{v} = (1,3,10) - (3,0,2) = (-2,3,8)$. Com que aquest vector no és paral·lel a $(-1,1,4)$, la recta no passa pel punt B .

c) L'equació de la recta és $(x,y,z) = (3,0,2) + t(-2,3,8)$.

9. Determineu l'equació del pla perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ que passa pel punt $(1,1,2)$. Quina distància hi ha d'aquest pla a l'origen de coordenades?

En primer lloc cal trobar un vector director de la recta, ja sigui escrivint l'equació paramètricament o per altres mètodes. Així, per exemple, l'equació de la recta es pot escriure

$$r: (x,y,z) = (0,-1,-2) + t(1,1,-1)$$

i el vector és, llavors, $(1,1,-1)$.

L'equació del pla és $\pi: x - 1 + y - 1 - (z - 2) = 0$ o bé, simplificant, $\pi: x + y - z = 0$. És evident que el pla passa per l'origen de coordenades i, per això, la distància del $(0,0,0)$ al pla val zero.

10. Considereu la recta $r: \begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ i el pla $p: 2x - y + az + 2 = 0$ on a és

un paràmetre.

- Trobeu un vector director de la recta i un vector perpendicular al pla.
- Quin ha de ser el valor de a per tal que la recta i el pla siguin paral·lels?
- Esbrineu si existeixen valors de a per als quals la recta i el pla siguin perpendiculars. En cas afirmatiu, calculeu-los.
- Esbrineu si existeixen valors de a per als quals la recta i el pla formin un angle de 30° . En cas afirmatiu, calculeu-los.

a) La recta es pot expressar en forma paramètrica com

$$r: (x, y, z) = (-1, -1, 0) + t(2, 1, -1).$$

Així, un vector director és $\vec{v} = (2, 1, -1)$.

Un vector perpendicular al pla, en funció d' a , és $\vec{w} = (2, -1, a)$.

b) La recta i el pla seran paral·lels quan $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin perpendiculars, és a dir, quan $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Llavors, $(2, 1, -1) \cdot (2, -1, a) = 3 - a = 0$ i, quan el paràmetre val 3 la recta i el pla són paral·lels.

c) De forma anàloga, la recta i el pla seran perpendiculars quan els dos vectors siguin paral·lels, però això no pot passar ja que no hi ha cap valor d' a que permeti que

$$\frac{2}{2} = \frac{-1}{1} = \frac{a}{-1}.$$

d) Ara cal que els vectors formin un angle α de 60° o bé de 120° . Utilitzant el producte escalar,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha,$$

$$3 - a = \sqrt{6} \sqrt{5 + a^2} \left(\pm \frac{1}{2} \right),$$

$$a^2 + 12a - 3 = 0,$$

$$a = -6 \pm \sqrt{39}.$$

11. Calculeu l'equació de la recta paral·lela a la recta $r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ que passa pel punt $(0, 1, 0)$.

Es pot encarar el problema al menys de dues formes. La primera, i més senzilla, és observar

que la recta buscada ha de ser de la forma $\begin{cases} x + y - z = D_1 \\ 2x - y + z = D_2 \end{cases}$. Els valors de D_1 i D_2 es

calculen imposant que la nova recta passi pel punt $(0, 1, 0)$. Aquests valors són $D_1 = 1$,

$D_2 = -1$. Així, les equacions implícites de la recta buscada són

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}.$$

Una altra forma consisteix en calcular el vector director de la recta r i construir l'equació vectorial de la recta demanada. Per trobar el vector director de r , al qual denotarem per v_r , es poden buscar les seves equacions paramètriques,

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = -\frac{1}{3} + \lambda, \quad z = \lambda \Rightarrow v_r = (0, 1, 1).$$

També podem trobar el vector perpendicular als dos plans que defineixen la recta, ja sigui utilitzant el producte escalar,

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, -1, 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0, c = b \Rightarrow v_r = (0, 1, 1)$$

o el producte vectorial,

$$v_r' = (1,1,-1) \wedge (2,-1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-3,-3) \Rightarrow v_r = (0,1,1).$$

Sigui com sigui, l'equació vectorial de la recta buscada és $(x,y,z) = (0,1,0) + t \cdot (0,1,1)$.

Si es troba el vector director de la recta r , comteu 1 punt; l'altre és per l'equació de la recta buscada. Naturalment, si algun estudiant ho fa pel primer procediment, els 2 punts són per la qüestió ben acabada.

12. Determineu els extrems d'un segment AB sabent que el punt A pertany al pla $2x + y + z = 0$, el punt B pertany a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ i el punt mitjà del segment és $(0,0,0)$.

Sigui $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$. Com que el punt A pertany al pla donat, sabem que $2a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Per altra banda, el punt B ha de complir l'equació de la recta; així, $\begin{cases} b_1 + 2b_2 - 5 = 0 \\ 3b_2 + b_3 - 6 = 0 \end{cases}$. A més a més, sabem que $\frac{A+B}{2} = (0,0,0)$. D'aquí ens surt que

$a_1 = -b_1$, $a_2 = -b_2$ i $a_3 = -b_3$. Llavors, el sistema a resoldre és $\begin{cases} 2b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ b_1 + 2b_2 = 5 \\ 3b_2 + b_3 = 6 \end{cases}$, que té per

solució $b_1 = -\frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{8}{3}$ i $b_3 = -2$. Els punts buscats són $A = \left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, 2\right)$ i $B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, -2\right)$.

Una altra forma de plantejar el problema és trobar les equacions paramètriques de la recta. Llavors ens queda que $B = (2t+1, -t+2, 3t)$. Per tant, i com que $A+B = (0,0,0)$, tenim $A = (-2t-1, t-2, -3t)$. Aquest punt ha de complir l'equació del pla donat, $2(-2t-1) + (t-2) + (-3t) = 0$. La solució d'aquesta equació ens dona $t = -\frac{2}{3}$. Llavors,

$B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, -2\right)$ i $A = \left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, 2\right)$.

És difícil donar un patró de puntuacions en aquesta qüestió. Doneu 1 punt pel plantejament i l'altre per la resolució.

13. Considereu el sistema d'equacions $\begin{cases} px + 7y + 8z = 1370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1395 \end{cases}$

- Discutiu-lo en funció del paràmetre p .
- Doneu la interpretació geomètrica en els casos en què el sistema és incompatible.
- Resoleu el sistema per a $p = 6$.

a) Esglaonant la matriu ampliada del sistema ens queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 7 & 8 & 1370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1395 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1395 \\ p & 7 & 8 & 1370 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & p-7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 9-p & 1365-200p \end{array}\right).$$

Per a $p=9$ i per a $p=7$, el rang de la matriu del sistema és igual a 2 i el rang de la matriu ampliada és 3. Aquests valors fan que el sistema sigui incompatible. Per a qualsevol altre valor el sistema és compatible determinat.

Evidentment, el problema es pot començar calculant el determinant de la matriu del sistema,

$$\begin{vmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{vmatrix} = -p^2 + 16p - 63,$$

que té com a arrels els valors $p=7$ i $p=9$. Per a $p=7$, la primera i la tercera equacions ens deixen veure ja que el sistema és incompatible; per a $p=9$ cal esglaonar la matriu ampliada del sistema.

b) Per a $p=7$, les equacions primera i tercera corresponen a dos plans paral·lels; és a dir, tenim dos plans paral·lels i un tercer que els talla.

Per a $p=9$, no hi ha cap pla paral·lel. Això vol dir que els plans es tallen dos a dos en rectes que són paral·leles entre si.

c) Quan $p=6$, la solució del sistema (que pot estar resolt pel mètode de Gauss o qualsevol altre) és $x=85$, $y=60$ i $z=55$.

14. Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ que passa per l'origen de coordenades.

Primerament, cal obtenir el vector director de la recta que ha d'actuar com a vector de coeficients o vector perpendicular del pla buscat.

Això es pot fer escrivint la recta d'alguna forma que el posi de manifest. Per exemple, de la segona equació, $y=3-2x$.

Substituint a la primera i aïllant z , $z=1-x-y=1-x-3+2x=x-2$.

Lavors, l'equació de la recta es pot escriure

$$(x, y, z) = (0, 3, -2) + x(1, -2, 1)$$

i el vector buscat és $(1, -2, 1)$.

També es pot calcular a partir del producte vectorial dels vectors de coeficients dels plans que defineixen la recta.

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1).$$

Finalment, com que el pla demanat ha de passar per l'origen, la seva equació és $x-2y+z=0$.

15. Trobeu els punts de la recta $r: x - 1 = y + 2 = z$ que equidisten dels plans $\pi_1: 4x - 3z - 1 = 0$ i $\pi_2: 3x + 4y - 1 = 0$.

Un punt qualsevol de la recta es pot expressar com $(z + 1, z - 2, z)$. Llavors, igualant la distància d'aquest punt a cada un dels plans,

$$\left| \frac{4(z+1) - 3z - 1}{\sqrt{16+9}} \right| = \left| \frac{3(z+1) + 4(z-2) - 1}{\sqrt{16+9}} \right| \rightarrow z + 3 = \pm(7z - 6).$$

Amb el signe positiu: $z + 3 = 7z - 6 \rightarrow -6z = -9 \rightarrow z = 3/2$ i el punt és $(5/2, -1/2, 3/2)$.

Amb el signe negatiu: $z + 3 = -7z + 6 \rightarrow 8z = 3 \rightarrow z = 3/8$ i el punt és $(11/8, -13/8, 3/8)$.

16. A l'espai es consideren els tres plans d'equacions:

$\pi_1: x + 2y + z = 1$, $\pi_2: px + y + pz = 1$ i $\pi_3: px + y + 2z = 1$, on p és un paràmetre real.

- Esbrineu per a quins valors de p els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan $p = 1$.
- Hi ha algun valor de p que faci que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta recta.
- Trobeu quina és la posició relativa dels tres plans quan $p = 1/2$.

De fet, l'estudi demanat es pot fer a partir de la discussió del sistema format per les equacions dels tres plans.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ px + y + pz = 1 \\ px + y + 2z = 1 \end{cases}$$

En primer lloc, s'estudia el rang de la matriu ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ p & 1 & p & 1 \\ p & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1-2p & 0 & 1-p \\ 0 & 1-2p & 2-p & 1-p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1-2p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 2-p & 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors, la matriu de coeficients deixa de tenir rang 3 quan $p = 1/2$ i $p = 2$.

Es pot arribar a la mateixa conclusió igualant a zero el determinant de la matriu de coeficients.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 1 & p \\ p & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2 - 5p + 2 = 0 \rightarrow p = \frac{1}{2}, 2.$$

El cas $p = 1/2$ fa que el sistema sigui incompatible i $p = 2$ compatible indeterminat.

a) Els tres plans es tallen en un punt quan p és diferent de 2 i de $1/2$, ja que llavors el sistema és compatible determinat. Quan $p = 1$, el sistema triangulat s'escriu

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

que proporciona com a solució el punt $(1,0,0)$.

b) Per a què la intersecció sigui una recta cal que el sistema sigui compatible indeterminat. Això només pot succeir quan $p = 2$. En aquest cas, els tres plans són $\pi_1 : x + 2y + z = 1$, $\pi_2 : 2x + y + 2z = 1$ i $\pi_3 : 2x + y + 2z = 1$, de manera que el segon i el tercer són el mateix i

el primer, al no ser paral·lel, proporciona una recta com a intersecció. Aïllant y i z de les equacions dels dos primers plans s'obté $y = 1/3$ i $z = 1/3 - x$. D'aquí, l'equació vectorial de la recta es pot escriure

$$(x, y, z) = (0, 1/3, 1/3) + x(1, 0, -1).$$

c) Quan $p = 1/2$ el sistema és incompatible, per tant no hi ha intersecció comuna als tres plans. Ara les equacions són $\pi_1 : x + 2y + z = 1$, $\pi_2 : x/2 + y + z/2 = 1$ i $\pi_3 : x/2 + y + 2z = 1$ i és evident que els dos primers plans són paral·lels mentre que el tercer els talla.

17. Considereu els punts de l'espai $P = (-1, a - 1, 3)$, $Q = (0, a - 2, 1 - a)$ i $R = (2, -1, 6 - 6a)$.

a) Trobeu el valor de a per al qual els tres punts estan alineats.

b) Quan els tres punts estan alineats, quina és l'equació de la recta que els conté?

a) Una manera senzilla d'imposar que els tres punts estiguin alineats consisteix en demanar que els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$ siguin paral·lels, és a dir, proporcionals.

$$\overrightarrow{PQ} = (0, a - 2, 1 - a) - (-1, a - 1, 3) = (1, -1, -a - 2),$$

$$\overrightarrow{QR} = (2, -1, 6 - 6a) - (0, a - 2, 1 - a) = (2, 1 - a, 5 - 5a).$$

Llavors, seran paral·lels si $\frac{2}{1} = \frac{1-a}{-1} = \frac{5-5a}{-a-2}$ i les dues igualtats són certes quan $a = 3$.

Existeix la possibilitat que ho facin per altres vies. Així per exemple, poden construir l'equació de la recta que passa per dos punts en funció de a i després imposar que passi pel tercer. Fins i tot, algun estudiant amb tendència a utilitzar fórmules pot calcular l'àrea del triangle i imposar que valgui zero.

b) Quan $a = 3$, es té $P = (-1, 2, 3)$, $Q = (0, 1, -2)$ i $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, -5)$. La recta es pot escriure

$$(x, y, z) = (0, 1, -2) + t(1, -1, -5) \quad \text{o també} \quad x = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-5}.$$

18. Trobeu l'equació de la recta continguda en el pla $\pi: x + 2y + 6z - 2 = 0$, que talla els eixos OY i OZ .

La part més important d'aquesta qüestió és "imaginar" correctament què cal fer. Primerament es busquen els punts de tall del pla amb els eixos esmentats.

Eix OY : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, que substituït dins l'equació del pla proporciona $y = 1$.

Eix OZ : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, que substituït dins l'equació del pla proporciona $z = \frac{1}{3}$.

Llavors, la recta demanada és la que passa pels punts $(0,1,0)$ i $(0,0,1/3)$,
 $(x,y,z) = (0,1,0) + t(0,1,-1/3)$,

o també

$$x = 0, \quad \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1/3}.$$

19. Considereu la recta d'equació $r: x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$.

- Expresseu el quadrat de la distància d'un punt qualsevol (x, y, z) de la recta al punt $P = (1, 2, 5)$ com una funció de la coordenada x .
- Trobeu quin valor de x fa mínima aquesta funció, dedueu quin punt Q de la recta és el més proper a P i calculeu la distància del punt a la recta.
- Escriviu l'equació de la recta que passa per P i Q i comproveu que és perpendicular a r .

a) La magnitud demanada és $d^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2$. Llavors, tenint en compte que un punt qualsevol de la recta verifica

$$\begin{aligned} \frac{y-2}{2} &= x \rightarrow y = 2x + 2, \\ \frac{z-1}{2} &= x \rightarrow z = 2x + 1, \end{aligned}$$

la funció de x demanada és

$$f(x) = (x-1)^2 + (2x)^2 + (2x-4)^2 = 9x^2 - 18x + 17.$$

b) Com que $f'(x) = 18x - 18$ i $f''(x) = 18$, la derivada s'anul·la quan $x = 1$ i es tracta d'un mínim.

Tenint en compte que quan la funció es mínima, la distància de P a la recta també ho és, el punt Q més proper a P és $(1,4,3)$.

Donat que $f(1) = 8$, la distància de P a la recta val $\sqrt{8}$.

c) L'equació de la recta que passa pels punts $P = (1,2,5)$ i $Q = (1,4,3)$ es pot escriure

$$x = 1, \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{-2}.$$

Com a la qüestió 4, doneu per bona la solució escrita com

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{-2}$$

Finalment, com a vectors directors de les rectes es poden considerar $(1,2,2)$ i $(0,2,-2)$, que, tenen producte escalar nul, $(1,2,2) \cdot (0,2,-2) = 0$, cosa que garanteix la perpendicularitat de les dues rectes.

20. Discutiu el sistema següent
$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + py + 2z = 10 \\ px + 6y + 3z = 12 \end{cases}$$
 en funció del paràmetre p . Doneu la interpretació geomètrica del sistema en cada cas i resoleu-lo quan sigui compatible.

Amb un sol pas d'esglaonament de la matriu ampliada ja es poden treure conclusions.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & p & 2 & 10 \\ p & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & p-4 & 0 & 0 \\ 0 & 6-2p & 3-p & 12-5p \end{pmatrix}.$$

- Si $p = 4$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas els rangs de la matriu de coeficients i de l'ampliada valen 2 i el sistema és compatible indeterminat.

El sistema queda $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ -2y - z = -8 \end{cases}$ i la solució es pot escriure com $x = -3$, $z = 8 - 2y$.

Per a aquest valor de p , el sistema original és
$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + 4y + 2z = 10 \\ 4x + 6y + 3z = 12 \end{cases}$$
 Si s'interpreta que cada

i el segon els talla de manera que no hi ha intersecció comuna.

- Si $p \neq 3$ i $p \neq 4$ tots dos rangs valen 3 i el sistema és compatible determinat. Per a aquests valors del paràmetre, si es fa un pas més d'esglaonament, s'obté

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & p-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-p & 12-5p \end{pmatrix}.$$

Lavors, la solució és $z = \frac{12-5p}{3-p}$, $y = 0$ i $x = \frac{3}{3-p}$, corresponent a tres plans que es tallen en un punt.

Probablement, molts estudiants, en lloc d'esglaonar, calcularan el determinant de la matriu de coeficients que, com es veu a continuació, quan s'iguali a zero condueix als valors de p que discriminen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 6 & 3 \\ 2 & p & 2 \end{vmatrix} = p^2 - 7p + 12 = 0 \rightarrow p = 3, 4.$$

A partir d'aquí cal continuar la discussió com abans. Les resolucions també es poden dur a terme usant el mètode de Cramer.

21. Trobeu les equacions dels plans paral·lels a $\pi: 2x - y + 2z = 3$ situats a 6 unitats de distància d'aquest.

Els plans demanats tenen equacions de la forma $2x - y + 2z + D = 0$ i han de passar a distància 6 de qualsevol punt del pla π , per exemple el $(0, -3, 0)$. Per tant, s'ha de verificar

$$6 = \left| \frac{3+D}{\sqrt{4+1+4}} \right| = \left| \frac{3+D}{3} \right| \rightarrow 3+D = \pm 18 \rightarrow D = 15 \text{ i } D = -21.$$

Substituint els valors de D s'obtenen les equacions demanades.

$$2x - y + 2z + 15 = 0, \quad 2x - y + 2z - 21 = 0.$$

22. Donada la matriu següent dependent d'un paràmetre m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

- a) Estudieu-ne el rang segons els valors de m .
b) Digueu quina és la posició relativa dels plans $\pi_1: x + y + 2z = 2$, $\pi_2: 2x + my + 2mz = 2 + m$ i $\pi_3: mx + 2y + (2 + m)z = 0$, segons els valors de m .

a) Esglaonant,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 2m-4 \\ 0 & 2-m & 2-m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 2m-4 \\ 0 & 0 & m-2 \end{pmatrix}$$

Lavors, el rang de la matriu es 3 si $m \neq 2$ i 1 si $m = 2$.

L'obtenció del valor de m que discrimina també es pot fer igualant a zero el determinant de la matriu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0 \rightarrow m = 2.$$

A partir d'aquí cal esbrinar quin rang té la matriu quan $m = 2$

b) Val la pena observar que la matriu de l'apartat anterior és la matriu de coeficients dels plans donats. Així, si $m \neq 2$, el sistema és compatible determinat; per tant, els plans es tallen en un punt. Si $m = 2$, les equacions són $\pi_1: x + y + 2z = 2$, $\pi_2: 2x + 2y + 4z = 4$ i $\pi_3: 2x + 2y + 4z = 0$, els dos primers plans són coincidents i el tercer és paral·lel a ells.

23. Una recta r és paral·lela a la recta $s: x - 1 = y - 1 = z - 1$, talla en un punt A la

recta $t: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 1$, i en un punt B la recta $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.

- a) Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes r i t .
- b) Trobeu el punt B calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta l .
- c) Trobeu l'equació de la recta r .
- d) Trobeu el punt A .

a) El pla demanat és paral·lel als vectors directors de les rectes s i t , $(1,1,1)$ i $(3,2,1)$ respectivament. Lavors, el vector de coeficients (a,b,c) del pla demanat és qualsevol que sigui perpendicular als dos vectors. Per exemple, es pot plantejar el sistema

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (1,1,1) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (3,2,1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow b = -2a, c = a.$$

Per tant, qualsevol vector de la forma $(a, -2a, a)$, per exemple $(1, -2, 1)$, serveix com a vector de coeficients o perpendicular al pla. Per construir l'equació només resta trobar un punt del pla. Qualsevol de la recta t serveix, per exemple el $(1, 0, -1)$.

Equació del pla: $(x-1) - 2y + (z+1) = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0$.

També es pot obtenir el vector (a,b,c) per mitjà del producte vectorial

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

i a partir d'aquí es completa la construcció de l'equació.

b) Punt d'intersecció de la recta $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ i el pla $x-2y+z=0$:

La primera igualtat de l'equació de la recta permet escriure $x = y + 1$. Si es substitueix dins l'equació del pla i s'aïlla z s'obté $z = y - 1$. Finalment, substituint z dins la segona igualtat de l'equació de la recta, $\frac{y-1}{2} = \frac{y-1}{3} \rightarrow y = 1$ i el punt buscat és $B=(2,1,0)$.

c) La recta r és la paral·lela a s que passa per B ,

$$x-2 = y-1 = z.$$

d) Finalment, el punt A és el d'intersecció de r i t ,

$$\begin{cases} x-2 = y-1 = z \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1 \end{cases}$$

De les dues igualtats de l'equació de r es pot escriure $x = z+2$ i $y = z+1$. Quan es substitueixen dins l'equació de t ,

$$\frac{z+1}{3} = \frac{z+1}{2} = z+1,$$

on les dues igualtats es verifiquen quan $z = -1$. Per tant, el punt A és $(1,0,-1)$.

24. Donades les rectes $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ i $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$ i el punt $P = (1, 1, -1)$,

volem trobar l'equació de la recta que passa per P i que talla r i s . Per aconseguir-ho:

- Trobeu l'equació general o cartesiana (és a dir, l'equació de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π que conté la recta r i el punt P .
- Trobeu el punt M calculant el punt d'intersecció del pla π amb la recta s .
- Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts P i M .
- Comproveu que la recta trobada en l'apartat anterior és la que busquem.

- a) L'equació del pla π es pot trobar de diferents maneres. Aquí se n'exposen dues.

La primera consisteix en trobar dos vectors generadors del pla. Com que ha de contenir la recta r , el vector director d'ella, $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$, és un dels vectors generadors. L'altre es pot calcular com $\overrightarrow{PQ}$, essent Q un punt qualsevol de la recta r ; per exemple, $Q = (2, -1, 0)$. Així, $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 0) - (1, 1, -1) = (1, -2, 1)$ i l'equació vectorial del pla π és $(x, y, z) = (1, 1, -1) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(1, -2, 1)$, que dóna lloc a l'equació general $y + 2z + 1 = 0$.

En la segona forma, agafem l'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ i fem que sigui verificada per tres dels punts del pla: $P = (1, 1, -1)$, $Q_1 = (2, -1, 0)$ i $Q_2 = (3, 1, -1)$. Els dos últims estan extrets de la recta r . Q_1 es dedueix directament de l'equació i Q_2 s'obté sumant una vegada el vector director $\vec{v}_r = (1, 2, -1)$ a Q_1 . El sistema d'equacions que ens queda és

$$\begin{cases} A + B - C + D = 0 \\ 2A - B + D = 0 \\ 3A + B - C + D = 0 \end{cases}$$

que té per solució $A = 0$, $B = D$, $C = 2D$. Fent $D = 1$, per exemple, obtenim l'equació buscada: $y + 2z + 1 = 0$.

- b) Les equacions paramètriques de la recta s són $x = 1 + \lambda$, $y = -7 + 2\lambda$, $z = -5 + 3\lambda$. Substituint-les a l'equació del pla anterior, tenim

$$(-7 + 2\lambda) + 2(-5 + 3\lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow 8\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

El punt de tall és $M = (1 + 2, -7 + 4, -5 + 6) = (3, -3, 1)$.

Naturalment, hi ha altres maneres per a calcular aquest punt. Per exemple, l'equació contínua de la recta s es pot descompondre en dues equacions implícites i resoldre el sistema format per elles i l'equació del pla de l'apartat anterior.

c) L'equació contínua de la recta demanada és

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z+1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2}.$$

d) Per construcció, la recta trobada passa pel punt $P = (1,1,-1)$ i talla a la recta s en el punt $M = (3,-3,1)$. Per tant, solament resta per comprovar que també talla a la recta r . Un dels mètodes per a realitzar aquesta comprovació és veure que el sistema format per les equacions contínues d'ambdues rectes és compatible determinat,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ y + 2z = -1 \\ 2x + y = 3 \\ x - z = 2 \end{array} \right.$$

Sumant la primera i la tercera equació tenim $4x = 8$, és a dir, $x = 2$. D'aquí, a més a més, $y = -1$. De la segona equació, $z = 0$, valor que també compleix la quarta equació. Per tant, la recta de l'apartat c) talla a la recta r en el punt $(2,-1,0)$.

Aquest apartat es pot raonar també sense buscar el punt d'intersecció amb r . En efecte, la recta trobada a l'apartat c) passa per P i per M per construcció. Com que, a més a més, està continguda al pla π , que també conté la recta r , la intersecció entre les dues està assegurada, a menys que fossin paral·leles, que no és, evidentment, el cas.

25. Donats el pla $\pi: 3x - 2y + 5z = 6$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3}$, busqueu el punt de tall, si existeix.

De l'equació contínua de la recta se'n dedueix que

$$x = 1 + 2\lambda, \quad y = -1 + \lambda, \quad z = -2 - 3\lambda.$$

Substituint aquests valors a l'equació del pla π ens queda que

$$3(1 + 2\lambda) - 2(-1 + \lambda) + 5(-2 - 3\lambda) = 6 \Leftrightarrow -11\lambda = 11 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

El punt de tall és $P = (-1, -2, 1)$.

El problema també es pot resoldre trobant les equacions implícites de la recta i resolent el sistema de tres equacions amb tres incògnites resultant d'ajuntar-hi l'equació del pla.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2y+2 \\ -3y-3 = z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = 3 \\ 3y+z = -5 \end{cases}$$

El sistema és

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 6 \\ x - 2y = 3 \\ 3y + z = -5 \end{cases}$$

que té per solució el punt P .

26. Donats el punt $P = (7, 5, 1)$, el pla $\pi: x - 2y - 3z = 10$ i la recta $r: \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 7 \\ x - 6y - 2z = 5 \end{cases}$:

- a) Trobeu la distància del punt P al pla π .
- b) Trobeu la distància del punt P a la recta r .
- c) Trobeu la distància de la recta r al pla π .

- a) La distància d'un punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ a un pla $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ ve donada per la fórmula

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

En el nostre cas, $d(P, \pi) = \frac{|7 - 10 - 3 - 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-16|}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}}.$

- b) La manera més directa de trobar la distància d'un punt P a una recta r és la utilització de la fórmula

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}_r\|}{\|\vec{v}_r\|},$$

essent Q un punt qualsevol de la recta i $\vec{v}_r$ el seu vector director.

De les equacions implícites de la recta se'n poden deduir les seves equacions paramètriques,

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

Per tant, podem agafar $Q = (3, 0, -1)$ i $\vec{v}_r = (2, 1, -2)$.

Una altra manera de trobar un punt de la recta i el seu vector director consisteix en donar un valor arbitrari a una de les variables. Si fem, per exemple, $y = 0$, del sistema que defineix la recta en deduïm

$$\begin{cases} 3x + 2z = 7 \\ x - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3, \quad z = -1,$$

obtenint així un punt de la recta, $Q = (3, 0, -1)$. El vector director s'obté buscant un vector perpendicular als vectors característics dels plans que defineixen la recta, ja sigui utilitzant el producte escalar,

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (3, -2, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -6, -2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b + 2c = 0 \\ a - 6b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2b, \quad c = -2b$$

d'on $\vec{v}_r = (2, 1, -2)$, o utilitzant el producte vectorial,

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = (16, 8, -16) \parallel (2, 1, -2).$$

Sigui com sigui,

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -4 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (12, -12, 6).$$

$$\text{Per tant, } d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}_r\|}{\|\vec{v}_r\|} = \frac{\|(12, -12, 6)\|}{\|(2, 1, -2)\|} = \frac{18}{3} = 6.$$

Encara hi ha una altra manera de trobar la distància entre el punt P i la recta r . Consisteix en trobar el pla perpendicular a r , passant per P . Es busca la intersecció entre aquest nou pla i la recta. Sigui Q el punt d'intersecció. Llavors, $d(P, r) = d(P, Q)$. Per si algú ho fa així, el pla perpendicular a r , passant per P , té per equació $2x + y - 2z - 17 = 0$ i el punt de tall entre ell i la recta és el punt $Q = (5, 1, -3)$. Llavors,

$$d(P, r) = d(P, Q) = \sqrt{(5-7)^2 + (1-5)^2 + (-3-1)^2} = 6.$$

- c) La recta r i el pla π no són paral·lels, ja que el director de la recta i el característic del pla no són perpendiculars,

$$(2, 1, -2) \bullet (1, -2, -3) = 2 - 2 + 6 = 6 \neq 0.$$

Per tant, $d(r, \pi) = 0$.

27. Les rectes $r_1: \frac{x-a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ i $r_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-4}{-1}$ són coplanàries (és a dir,

estan incloses en un mateix pla).

a) Expliqueu, raonadament, quina és la posició relativa d'aquestes rectes.

b) Trobeu la relació que hi ha entre els paràmetres a i b .

c) Trobeu els valors de a i b si el pla que les conté passa pel punt $P = (2, 4, 6)$.

- a) Dues rectes coplanàries han de tallar-se o ser paral·leles. Com que els vectors directors corresponents no són proporcionals ($2/1 \neq 1/2$), sigui quin sigui el valor del paràmetre a , és evident que es tallen en un punt.
- b) Siguí Q el punt on es tallen. Llavors, per ser d'ambdues rectes,

$$Q = (a + 2\lambda, \lambda, -1 + 4\lambda) = (-2 + \mu, b + 2\mu, 4 - \mu) .$$

El sistema que ens queda,

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu = -2 - a \\ \lambda - 2\mu = b \\ 4\lambda + \mu = 5 \end{cases}$$

ha de ser compatible determinat. Treballant amb la matriu ampliada del sistema obtenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & & b \\ 2 & -1 & & -a-2 \\ 4 & 1 & & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & & b \\ 0 & 3 & & -a-2-2b \\ 0 & 9 & & 5-4b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & & b \\ 0 & 3 & & -a-2-2b \\ 0 & 0 & & 3a+2b+11 \end{array} \right) ,$$

la qual cosa ens porta a què el sistema és compatible determinat si i sol si $3a + 2b + 11 = 0$.

Podem arribar a la mateixa conclusió observant que la matriu del sistema té rang 2 (per exemple, les dues primeres files són independents) per a qualsevol valor del paràmetre a . Per tant, cal que la matriu ampliada no tingui rang 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2-a \\ 1 & -2 & b \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -9a - 6b - 33 = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b + 11 = 0 .$$

Encara es pot arribar a la mateixa conclusió d'una altra manera. De l'equació contínua de cada una de les rectes, podem passar a les equacions implícites,

$$r_1: \begin{cases} x - 2y = a \\ 4y - z = 1 \end{cases}; \quad r_2: \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y + 2z = b+8 \end{cases} .$$

El sistema format per les quatre equacions ha de ser compatible determinat:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -b-4 \\ 0 & 1 & 2 & b+8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2a-b-4 \\ 0 & 1 & 2 & b+8 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & b+8 \\ 0 & 0 & -9 & -4b-31 \\ 0 & 0 & -6 & -2a-4b-28 \end{pmatrix}$$

Les dues últimes files han de ser proporcionals:

$$\frac{3}{2} = \frac{4b+31}{2a+4b+28} \Leftrightarrow 3a + 2b + 11 = 0 .$$

Així, per a què les rectes siguin coplanàries ha de ser $3a + 2b + 11 = 0$.

c) El pla que les conté es pot escriure com

$$\pi : (x, y, z) = (a, 0, -1) + \lambda(2, 1, 4) + \mu(1, 2, -1) .$$

D'acord amb l'enunciat, el punt $P = (2, 4, 6) \in \pi$, és a dir, aquest punt satisfà l'equació del pla: $(2, 4, 6) = (a, 0, -1) + \lambda(2, 1, 4) + \mu(1, 2, -1)$. D'aquí, el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 2 - a \\ \lambda + 2\mu = 4 \\ 4\lambda - \mu = 7 \end{cases}$$

ha de ser compatible determinat.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2-a \\ 4 & -1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -a-6 \\ 0 & -9 & -9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & a+6 \\ 0 & 0 & 3a+9 \end{array} \right) .$$

Per tant, cal que $3a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -3$. Substituint aquest valor a la relació trobada a l'apartat anterior, tenim $b = -1$.

En definitiva, els valors són $a = -3$ i $b = -1$.

28. Donats el punt $P = (1, 2, 3)$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$:

- a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π que passa per P i és perpendicular a la recta r .
b) Trobeu el punt de tall entre la recta r i el pla π .

a) Podem agafar com a vector característic del pla buscat el vector director de la recta; així, $\pi : 2x + 3y - z + D = 0$. Imposem ara que el punt P compleixi aquesta equació, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 + D = 0$. D'aquí $D = -5$. L'equació del pla és $\pi : 2x + 3y - z - 5 = 0$.

b) El punt de tall és el que compleix les dues equacions que defineixen la recta i l'equació del pla,

$$\left. \begin{array}{l} -x + 1 = 2z - 10 \\ -y - 2 = 3z - 15 \\ 2x + 3y - z - 5 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ y + 3z = 13 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{array} \right\}$$

Encara que aquest sistema es pot resoldre utilitzant el mètode de Cramer, n'hi ha altres (Gauss, substitució,...) molt més fàcils. La solució d'aquest sistema és $x = 3$, $y = 1$, $z = 4$. El punt de tall és, doncs, $(3, 1, 4)$.

29. Sigui r i s dues rectes de l'espai les equacions respectives de les quals, que depenen d'un paràmetre real b , són les següents:

$$r: \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}, \quad s: \frac{x}{1} = \frac{y-b}{b+1} = \frac{z+1}{-1}$$

- a) Trobeu el punt de tall de la recta r amb el pla d'equació $x = 0$ i el punt de tall de la recta s amb aquest mateix pla.
b) Calculeu un vector director per a cada una de les dues rectes.
c) Estudieu la posició relativa de les dues rectes en funció del paràmetre b .

a) El punt de tall de la recta r amb el pla $x = 0$, té la primera component nul·la i, per tant, ha de complir que

$$\begin{cases} y + 3z = 1 \\ 2y + 5z = 1 \end{cases}$$

La solució d'aquest sistema és $y = -2$ i $z = 1$. Així el punt que estem buscant és $P = (0, -2, 1)$.

Quant a trobar el punt de tall de la recta s amb el pla $x = 0$, solament cal substituir aquest valor a l'equació contínua de la recta s per veure que, llavors, $y = b$ i $z = -1$. Així el punt buscat és $Q = (0, b, -1)$.

b) El vector director de la recta r ha de ser perpendicular als vectors característics dels plans que la determinen, $v_1 = (b, 1, 3)$, $v_2 = (1, 2, 5)$. Llavors, si $v_r = (\alpha, \beta, \gamma)$, cal que

$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (b, 1, 3) = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (1, 2, 5) = 0.$$

Aquests productes escalars donen lloc al sistema d'equacions

$$\begin{cases} \alpha b + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

De la segona equació, $\alpha = -2\beta - 5\gamma$. Substituint a la primera equació i fent operacions s'arriba a que $\beta(1 - 2b) = \gamma(3 - 5b)$, la qual cosa permet agafar, per exemple, $\beta = 3 - 5b$ i $\gamma = 1 - 2b$. Llavors,

$$\alpha = -2\beta - 5\gamma = -2(3 - 5b) - 5(1 - 2b) = -1.$$

Recordem que v_r també es pot calcular efectuant un producte vectorial,

$$v_r = (b, 1, 3) \times (1, 2, 5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -i + (3 - 5b)j + (2b - 1)k = (-1, 3 - 5b, 2b - 1).$$

El vector director de la recta s es treu directament de la seva equació, $v_s = (1, b + 1, -1)$.

c) Construïm la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ v_r \\ v_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+2 & -2 \\ -1 & 3-5b & 2b-1 \\ 1 & b+1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b+1 & -1 \\ 0 & b+2 & -2 \\ 0 & 4-4b & 2b-2 \end{pmatrix}$$

Estudiem el rang d'aquesta matriu, comprovant per quin valor del paràmetre b les dues últimes files són proporcionals. És a dir,

$$(b+2)(2b-2) = -2(4-4b) \iff b^2 - 3b + 2 = 0 \iff b = 1 \text{ o } b = 2.$$

Per tant,

- Si $b \neq 1$ i $b \neq 2$, tenim que $\text{rang } A = 3$; les dues rectes es creuen.
- Si $b = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; d'aquí, $\text{rang } A = 2$ i $\text{rang} \begin{pmatrix} v_r \\ v_s \end{pmatrix} = 1$. Les dues rectes són paral·leles.
- Si $b = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; o sigui, $\text{rang } A = 2$ i $\text{rang} \begin{pmatrix} v_r \\ v_s \end{pmatrix} = 2$. Les dues rectes es tallen.

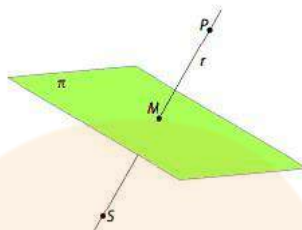
30. Donats el pla $\pi: x + 2y - z = 0$ i el punt $P = (3, 2, 1)$:

- a)** Calculeu l'equació contínua de la recta r que passa per P i és perpendicular a π .
b) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla π .

a) Els coeficients de l'equació del pla ens proporcionen el seu vector característic, que ens pot servir com a vector director de la recta buscada. Per tant, l'equació d'aquesta recta és

$$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

b) El punt de tall entre r i π és el punt mig entre el punt P i el seu simètric respecte del pla π .



Busquem aquest punt, al qual anomenarem M .

$$\begin{cases} (x, y, z) \in r \iff x = 3 + \lambda, y = 2 + 2\lambda, z = 1 - \lambda \\ (x, y, z) \in \pi \iff x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Llavors, $(3 + \lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (1 - \lambda) = 0 \iff 6\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = -1$. El punt de tall és $M = (2, 0, 2)$.

Si anomenem $S = (x_s, y_s, z_s)$ al punt simètric, tenim

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MS} \iff (2, 0, 2) - (3, 2, 1) = (x_s, y_s, z_s) - (2, 0, 2) \iff x_s = 1, y_s = -2, z_s = 3$$

El punt simètric és $S = (1, -2, 3)$.

31. Siguin $P = (3 - 2a, b, -4)$, $Q = (a - 1, 2 + b, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$ tres punts de l'espai $\mathbb{R}^3$.

- a)** Calculeu el valor dels paràmetres a i b per als quals aquests tres punts estiguin alineats.
b) Trobeu l'equació contínua de la recta que els conté quan estan alineats.
c) Quan $b = 0$, trobeu els valors del paràmetre a perquè la distància entre els punts P i Q sigui la mateixa que la distància entre els punts P i R .
d) Si $b = 0$, calculeu el valor del paràmetre a perquè els punts P , Q i R determinin un triangle equilàter.

a) Els punts P , Q i R estan alineats si i sol si $\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{PR}$, és a dir, si i sol si

$$(3a - 4, 2, 4) = k(2a, -2 - b, 2)$$

D'aquí, cal que $3a - 4 = 2ka$, $2 = k(-2 - b)$ i $4 = 2k$. De l'última equació se'n treu que $k = 2$ i, llavors, $a = -4$ i $b = -3$.

b) Per $a = -4$ i $b = -3$, els punts són $P = (11, -3, -4)$, $Q = (-5, -1, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$. La recta que passa per P i Q (i, per tant, també per R) té per equació contínua

$$\frac{x-11}{-5-11} = \frac{y+3}{-1+3} = \frac{z+4}{0+4}, \text{ és a dir, } \frac{x-11}{-16} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{4}.$$

c) Quan $b = 0$ els punts són $P = (3 - 2a, 0, -4)$, $Q = (a - 1, 2, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$. Llavors,

$$d(P, Q) = \sqrt{[(a - 1) - (3 - 2a)]^2 + (2 - 0)^2 + (0 + 4)^2} = \sqrt{(3a - 4)^2 + 20},$$

$$d(P, R) = \sqrt{[3 - (3 - 2a)]^2 + (-2 - 0)^2 + (-2 + 4)^2} = \sqrt{4a^2 + 8}.$$

La igualtat entre aquestes dues distàncies es produeix quan $(3a - 4)^2 + 20 = 4a^2 + 8$, és a dir, quan $a = 14/5$ o $a = 2$.

d) Perquè el triangle sigui equilàter ha de passar que $d(P, Q) = d(P, R) = d(Q, R)$. La primera igualtat és la que s'ha estudiat en l'apartat anterior. Imposem ara que $d(P, Q) = d(Q, R)$:

$$d(P, Q) = d(Q, R) \iff 9a^2 - 24a + 36 = a^2 - 8a + 36 \iff 8a^2 - 16a = 0 \iff a = 0 \text{ o } a = 2.$$

Evidentment també podem imposar que $d(P, R) = d(Q, R)$. En aquest cas queda $a = 2$ o $a = -14/3$.

Signi com sigui, el valor del paràmetre a per al qual el triangle determinat per P , Q i R és equilàter és $a = 2$.

Aquest apartat es pot resoldre també substituint a cada un dels punts els valors del paràmetre a trobats a l'apartat anterior, comprovant quin dels dos fa que les tres distàncies siguin iguals.

32. Considereu en l'espai $\mathbb{R}^3$ les rectes r i s , les equacions respectives de les quals són:

$$r: (x, y, z) = (4, 1, 0) + \lambda(m, 1, 1), \quad s: \begin{cases} x + 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

en què m és un paràmetre real. Estudieu si hi ha cap valor d'aquest paràmetre per al qual les rectes siguin perpendiculars i es tallin.

Dues rectes són perpendiculars si ho són els seus vectors directors. Busquem, per tant, els vectors directors de les rectes.

És clar que com a vector director de la recta r podem agafar $v_r = (m, 1, 1)$.

El vector director de la recta s es pot trobar de diferents maneres; entre elles:

- (a) Efectuant el producte vectorial dels vectors característics dels plans que la determinen,

$$v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-m, m-1, -1).$$

- (b) Buscant un vector (a, b, c) tal que sigui perpendicular als vectors característics dels plans que la determinen,

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 2, m) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a + 2b + mc = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \implies a = (m-2)c, \quad b = (1-m)c.$$

Fent $c = 1$ (qualsevol altre valor no nul també serveix), tenim que $v_s = (m-2, 1-m, 1)$.

- (c) Trobant les equacions paramètriques de la recta s . Per exemple, de la segona equació que la defineix podem deduir que $x = 1 - y - z$. Portant aquest valor a la primera, fent els càlculs adequats i aïllant la variable y , ens queda $y = (1-m)z - 1$. Amb això, $x = 2 - (2-m)z$. Les equacions paramètriques obtingudes per aquest camí són

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 - (2-m)\lambda \\ y &= -1 + (1-m)\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned} \right\}.$$

El vector director (coeficients del paràmetre λ) és llavors $v_s = (m-2, 1-m, 1)$.

Així, aquestes dues rectes són perpendiculars si i sol si $(m, 1, 1) \cdot (m-2, 1-m, 1) = 0$; d'aquí,

$$(m, 1, 1) \cdot (m-2, 1-m, 1) = 0 \implies m^2 - 3m + 2 = 0 \implies m = 1 \text{ o } m = 2.$$

Comprovem ara si les rectes es tallen per algun d'aquests dos valors.

- Quan $m = 1$, les equacions paramètriques de la recta r són $x = 4 + \lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. Substituint aquests valors a les equacions que determinen la recta s , tenim $(4 + \lambda) + 2(1 + \lambda) + \lambda = 0$ i $(4 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda = 0$. La primera igualtat es compleix per $\lambda = -3/2$ i la segona per $\lambda = -4/3$. Això vol dir que, en aquest cas, les rectes no es tallen.
- Per $m = 2$ obtenim, seguint el mateix procediment, les equacions $(4 + 2\lambda) + 2(1 + \lambda) + 2\lambda = 0$ i $(4 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda = 1$, que tenen $\lambda = -1$ com a solució comú.

Per tant, l'únic valor del paràmetre m per al qual les rectes són perpendiculars i es tallen és $m = 2$.

Naturalment, hi ha altres formes d'imposar la segona condició (que les rectes es tallin). Per exemple, buscant el vector $\overrightarrow{PQ}$, on P és un punt de la recta r i Q un punt de la recta s , i imposant que $\text{rang}(\overrightarrow{PQ}, v_r, v_s) < 3$. Això dona que $m = 2$.

De fet, és possible començar la resolució imposant la condició de què les rectes es tallin i comprovar després directament que pel valor obtingut, $m = 2$, les rectes són perpendiculars.

33. Donats els vectors $\vec{v}_1 = (a+1, 2a, 1)$, $\vec{v}_2 = (-2, a, 2a)$ i $\vec{v}_3 = (a, -2, 4a-2)$ de $\mathbb{R}^3$:
- Calculeu l'angle que formen $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ quan $a = 0$.
 - Trobeu el valor del paràmetre a perquè els vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ siguin perpendiculars dos a dos.

a) Sigui α l'angle format pels vectors v_1 i v_2 . Llavors,

$$\cos \alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \|v_2\|} = \frac{(1, 0, 1) \cdot (-2, 0, 0)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'aquí, $\alpha = 135^\circ = 3\pi/4$ rad.

b) Cal que es compleixi que $v_1 \cdot v_2 = 0$, $v_1 \cdot v_3 = 0$ i $v_2 \cdot v_3 = 0$.

$$v_1 \cdot v_2 = (a + 1, 2a, 1) \cdot (-2, a, 2a) = 2(a^2 - 1) = 0 \implies a = \pm 1$$

$$v_1 \cdot v_3 = (a + 1, 2a, 1) \cdot (a, -2, 4a - 2) = a^2 + a - 2 = 0 \implies a = 1, a = -2$$

$$v_2 \cdot v_3 = (-2, a, 2a) \cdot (a, -2, 4a - 2) = 8(a^2 - a) = 0 \implies a = 1, a = 0$$

Solament per $a = 1$ es compleixen les tres igualtats alhora.