Resum Funcions

Sitio:	Cursos IOC - Batxillerat	Imprimido por:	Invitado
Curso:	Matemàtiques aplicades a les Ciències socials (autoformació IOC)	Día:	viernes, 11 de febrero de 2022, 21:16
Libro:	Resum Funcions		

Descripción

Resem i dubtes Funcions

Tabla de contenidos

1. Punts d'una funció

Els punts d'una funció f(x) són de la forma

$$(x,f(x))$$

És a dir, per punts (x,y) d'una funció donem valors a x i substituïm aquest valor en la funció per trobar y.

Diem que f(x) és la imatge de x per la funció f(x)

Exemple

$f(x)=\frac{x-1}{x-2}$

x	$f(x)$	$punt$
-2	$f(-2)=\frac{-2-1}{-2-2}=\frac{-3}{-4}$	$\left(-2,\frac{3}{4}\right)$
-1	$f(-1)=\frac{-1-1}{-1-2}=\frac{-2}{-3}$	$\left(-1,\frac{2}{3}\right)$
0	$f(0)=\frac{0-1}{0-2}=\frac{1}{2}$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$
1	$f(1)=\frac{1-1}{1-2}=\frac{0}{-1}=0$	(1,0)

Observacions:

- Veiem que per al valor $x=2$ no podem trobar la seva imatge per f(x), ja que ens donaria $f(2)=\frac{2-1}{2-2}=\frac{1}{0}$ però $\frac{1}{0}$ no és cap nombre real.

En aquest cas, 2 no és del domini de la funció. (Veure el punt 2 d'aquest llibre)

No podem trobar la imatge de tots els valors d'x, només dels valors d'x que són del domini de la funció.

El domini d'aquesta funció és $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

Per a tots els valors de x, excepte per a x=2, podem trobar la seva imatge per la funció f

Fer una taula de valors com l'anterior per trobar punts de la funció no és suficient per trobar la gràfica de la funció. Més endavant estudiarem com fer les gràfiques d'algunes funcion.

- En el cas que la funció sigui una recta, sí serà suficient amb trobar 2 punts.

Exemple de recta

$f(x)=2x-1$

(Normalment en el cas de rectes, en comptes de f(x) posem y $y=2x-1$

Punts:

$x=0 \rightarrow y=2\cdot 0-1=0-1=-1$ Punt $(0,-1)$

$x=3 \rightarrow y=2\cdot 3-1=6-1=5$ Punt $(3,5)$

2. Domini d'una funció

Domini d'una funció f és el conjunt de nombres reals on la funciío està definida. És a dir, que tenen imatge per f.

Ho podem designar per D(f), D_f, dom(f)

El càlcul del domini d'una funció, depenent de com sigui aquesta funció, pot ser complicat. Però en aquest bloc ens limitarem a casos senzills:

Funcions polinòmiques

El domini d'una funció polinòmica és tot $\mathbb{R}$ (nombres reals)

Exemples

$a)\ f(x)=x^3-5x^2+3 \ \rightarrow \ D_f=\mathbb{R}$

$b)\ f(x)=2(x-1)^3 \ \rightarrow \ D_f=\mathbb{R}$

$c)\ f(x)=\frac{1}{2}x^3-5x^2+\frac{2}{3} \ \rightarrow \ D_f=\mathbb{R}$

Funció racional

Una funció racional és de la forma $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$

El domini és tots els nombres excepte els que anul·len el denominador

Exemples

$a)\ f(x)=\frac{1}{x} \ \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$b)\ f(x)=\frac{x-2}{x+3} \ \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-3\}$

$c)\ f(x)=\frac{x}{x^2-25} \ \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 5\}$

$d)\ f(x)=\frac{x^2}{x^2-3x} \ \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,3\}$

$e)\ f(x)=\frac{x}{x^2+1} \ \rightarrow D_f=\mathbb{R}$

f) $f(x)=\frac{x}{x^2-x-2} \ \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

Funció irracional

Veiem alguns exemples

$a)\ f(x)=\sqrt{x} \ \rightarrow \ D_f=[0,+\infty)$ podríem posar també $D_f=\mathbb{R}^+$

$b)\ f(x)=\sqrt{-x} \ \rightarrow \ D_f=(-\infty,0]$ podríem posar també $D_f=\mathbb{R}^-$

$c)\ f(x)=\sqrt{x-1} \ \rightarrow \ D_f=[1,+\infty)$

$d)\ f(x)=\sqrt{x^2+1} \ \rightarrow \ D_f=\mathbb{R}$

$d)\ f(x)=\sqrt{x^2-1} \ \rightarrow \ D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)=\mathbb{R}-(-1,1)$

$d)\ f(x)=\sqrt[3]{x} \ \rightarrow \ D_f=\mathbb{R}$

$e)\ f(x)=\sqrt[3]{x-1} \ \rightarrow \ D_f=\mathbb{R}$

3. Funció a trossos

Una **funció definida a trossos** és una funció que no està definida amb la mateixa forma algebraica per a tots els seus punts.

Exemple:

$$f(x)=\begin{cases} x & si\ x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-3} & si\ x>1 \end{cases}$$

O també la podríem expressar així:

$$f(x)=\begin{cases} x & (-\infty,1] \\ \dfrac{1}{x-3} & (1,+\infty) \end{cases}$$

Punts d'aquesta funció. Per exemple:

$\mathbf{x=-1} \;\rightarrow\; f(-1)=\mathbf{-1} \quad punt\ \mathbf{(-1,-1)}$

$\mathbf{x=0} \;\rightarrow\; f(0)=0 \quad punt\ \mathbf{(0,0)}$

$\mathbf{x=1} \;\rightarrow\; f(1)=\mathbf{1} \quad punt\ \mathbf{(1,1)}$

$\mathbf{x=2} \;\rightarrow\; f(2)=\dfrac{1}{2-3}=-1 \quad punt\ \mathbf{(2,-1)}$

$\mathbf{x=4} \;\rightarrow\; f(4)=\dfrac{1}{4-3}=1 \quad punt\ \mathbf{(4,1)}$

Observacions:

- En l'interval $(-\infty,1]$ posem interval tancat per la dreta per tal d'incloure l'1 ja que volem tots els valors $x\le 1$
- En l'interval $(1,+\infty]$ posem interval obert per la dreta per tal de no incloure l'1 ja que volem tots els valors $x>1$
- En els extrem infinits sempre posem interval obert, ja que ∞ no és cap nombre
- En els exemples anteriors no hem pogut fer el cas x=3 ja que seria f(3)=1/0 però 1/0 no és cap nombre

Domini d'aquesta funció

- En l'interval $(-\infty,1]$ com que la funció $f(x)=x$ és una recta, tots els punts de l'interval són del domini

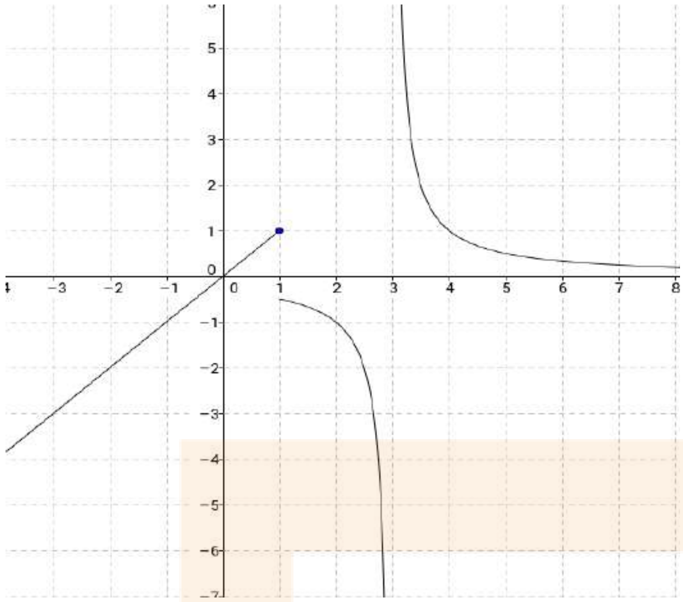
- En l'interval $(1,+\infty]$, el domini de la funció $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ és tots els nombres reals excepte el 3

Com que el 3 està en en l'interval $(1,+\infty]$, ho hem d'excloure del domini total de la funció f(x)

Per tant: $\boldsymbol{D_f=\mathbb{R}-\{-3\}}$

La gràfica de la funció és aquesta:

(f(x)=x sí ho sabeu dibuixar però no encara f(x)=1/(x-3))



Observació:

Mireu la diferència en el domini d'aquesta altra funció:

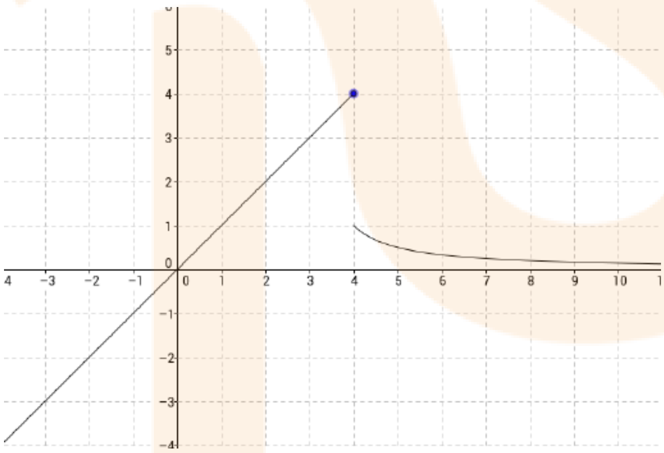
$$f(x)=\begin{cases} x & si\ x \le 4 \\ \dfrac{1}{x-3} & si\ x > 4 \end{cases}$$

En aquest cas x=3 sí és del domini de la funció ja que com que $3 \le 4$

f(3) = 3

Per tant, en l'únic valor de x que podria haver problema, x=3, no hi ha ja que per a aquest valor la funció és f(x)=x

La gràfica de la funció (encara no la sabeu trobar) és aquesta:



4. Paràbola

Una **paràbola** és una funció de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ amb $a\neq 0$

Gràfica d'una paràbola.

Per fer el gràfic d'una paràbola trobem els seus punts més significatius:

- **Talls amb l'eix x** La paràbola talla a l'eix x en les solucions de l'equació $ax^2+bx+c=0$

- **Tall amb l'eix y** (0,f(0))

- **Vèrtex** La coordenada x del vèrtex és $x=-\dfrac{b}{2a}$

  Per trobar la coordenada y, substituïm aquest valor de x en ax^2+bx+c

- Si $a>0$ $\Rightarrow$ la paràbola "mira" cap a dalt

  Si $a<0$ $\Rightarrow$ la paràbola "mira" cap a baix

4.1. Exemple 1

Gràfic de la paràbola $f(x) = x^2 - 3x - 4$

- **Talls amb l'eix x**

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Talls amb l'eix x: $(\mathbf{4,0}), (\mathbf{-1,0})$

- **Tall amb l'eix y**

$$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4$$

Tall amb l'eix y: $(\mathbf{0,-4})$

- **Vèrtex**

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

$$y = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 4 = -\frac{25}{4}$$

Per calcular la coordenada y del vèrtex substituïm en la funció:

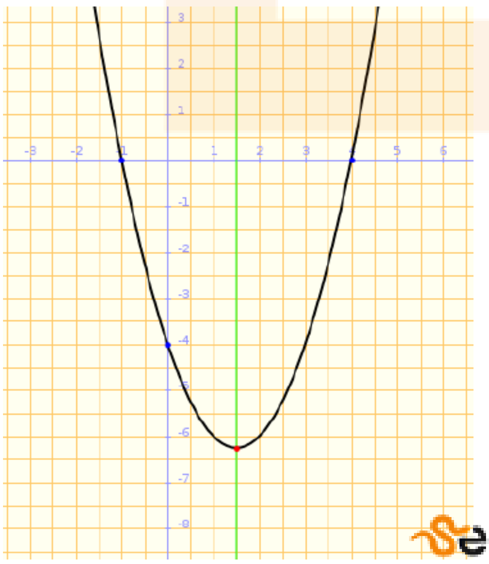
Vèrtex $\left(\mathbf{\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}}\right)$

- **Gràfica**

Observació:

Si el coeficient de la x^2 és positiu $\Rightarrow$ la paràbola "mira" cap a dalt

Si el coeficient de la x^2 és negatiu $\Rightarrow$ la paràbola "mira" cap a baix



4.2. Exemple 2

Gràfic de la paràbola $f(x) = -x^2 + 3x$

- **Talls amb l'eix x**

$-x^2+3x=0$

Per resoldre aquesta equació de segon grau incompleta no apliquem la fórmula de l'equació de segon grau

Ho fem més senzill extraient factor comú x:

$x\cdot(-x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \;\; o \;\; -x+3=0 \quad \Rightarrow \; x=0 \quad o \quad x=3$

Talls amb l'eix x: $\mathbf{(0,0), (3,0)}$

- **Tall amb l'eix y**

$f(0)=-0^2+3\cdot 0=0$

Tall amb l'eix y: $\mathbf{(0,0)}$

- **Vèrtex**

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\cdot(-1)}=\frac{3}{2}$$

Per calcular la coordenada y del vèrtex substituïm en la funció:

$$y=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$$

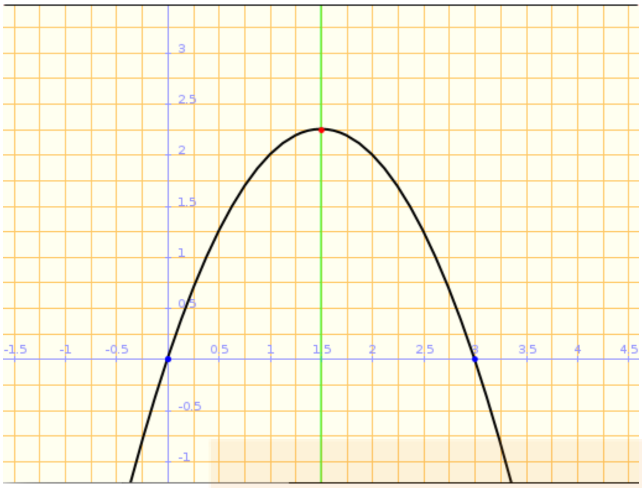
Vèrtex $\mathbf{\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)}$

- **Gràfica**

Observació:

Si el coeficient de la x^2 és positiu $\Rightarrow$ la paràbola "mira" cap a dalt

Si el coeficient de la x^2 és negatiu $\Rightarrow$ la paràbola "mira" cap a baix


-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1

5. Asímptotes

Són rectes a les quals la funció s'apropa.

Poden ser de 3 tipus:

- Asímptotes horitzontals $y=k$

- Asímptotes verticals $x=k$

- Asímptotes obliqües (no les estudiarem en aquest bloc).

5.1. Asímptotes verticals

Com podem trobar les asímptotes verticals d'una funció?

Una funció té una asímptota vertical en **x = a** si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Majoritàriament, els possibles valors de x on pot passar això són els punts que no són del domini i els punts que sent del domini hi ha algun límit lateral que dóna ∞

Un cop detectats aquests punts cal comprovar que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Per poder dibuixar la gràfica de la funció al voltant d'aquesta asímptota, cal fer els límits laterals. I en funció del resultat podem saber com van les branques de l'asímptota.

Exemple 1

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

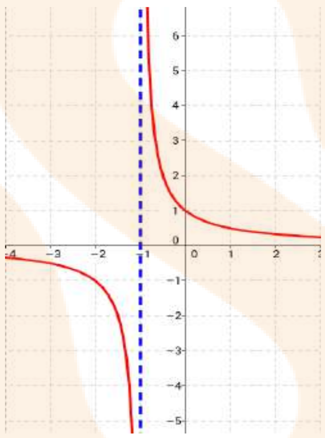
Dom(f(x))= $\mathbb{R} - \{-1\}$

Mirem si hi ha asímptota en x=-1

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0} = \infty \;\rightarrow\; x = -1 \text{ és } A.V$$

Per determinar els signes de l'∞, fem els límits laterals:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{array}\right\}$$



Exemple 2

$$f(x) = \frac{-x}{x-2}$$

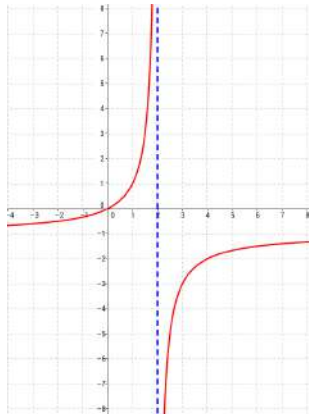
Dom(f(x))= $\mathbb{R} - \{2\}$

Mirem si hi ha asímptota en x=2

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x}{x-2} = \frac{2}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = 2 \text{ és } A.V$$

Per determinar els signes de l'∞, fem els límits laterals:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-x}{x-2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-x}{x-2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \end{array}\right\}$$



Exemple 3

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$$

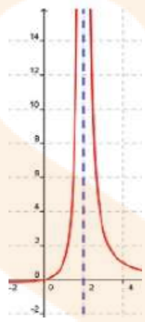
Dom(f(x))= $\mathbb{R} - \{2\}$

Mirem si hi ha asímptota en x=2

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{0} = \infty \quad \rightarrow \quad x = 2 \text{ és } A.V$$

Per determinar els signes de l'∞, fem els límits laterals:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$$



Exemple 4

$$f(x) = \frac{-x}{(x-2)^2}$$

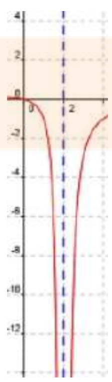
Dom(f(x))= $\mathbb{R} - \{2\}$

Mirem si hi ha asímptota en x=2

$$\lim_{x\to 2} \frac{-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{0} = \infty \quad \rightarrow x = 2 \text{ és } A.V$$

Per determinar els signes de l'∞, fem els límits laterals:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{array}\right\}$$



Exemple 5

$$f(x) = \frac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{x^2-9}}$$

Dom(f(x))= $\mathbb{R} - \{\pm 3\}$

Mirem si hi ha asímptota en x=3 i en x=-3

$x = 3$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x^2-9} = \frac{1}{0} = \infty \quad \to \boldsymbol{x = 3 \text{ és } A.V}$$

Per determinar els signes de l'∞, fem els límits laterals:

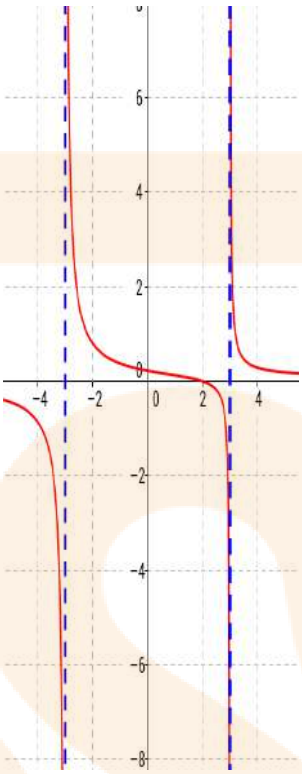
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x-2}{x^2-9} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-2}{x^2-9} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{array}\right\}$$

$x = -3$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x-2}{x^2-9} = \frac{1}{0} = \infty \quad \to \boldsymbol{x = -3 \text{ és } A.V}$$

Per determinar els signes de l'∞, fem els límits laterals:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x-2}{x^2-9} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x-2}{x^2-9} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$$



Exemple 6

$$f(x) = \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x^2-1}}$$

Dom(f(x))= $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Mirem si hi ha asímptota en x = 1

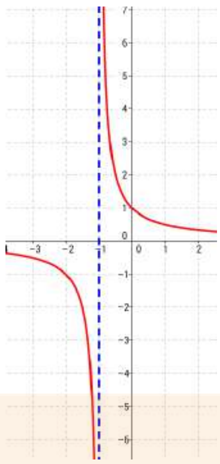
$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \quad \to \quad \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\text{No hi ha } AV \text{ en } x = 1}$$

Mirem si hi ha asímptota en x = -1

$$\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{-2}{0} = \infty \quad \to \color{blue}{\boldsymbol{x = -1 \text{ és } AV}}$$

Per determinar els signes de l'∞, fem els límits laterals:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{array}\right\}$$



5.2. Asímptotes horitzontals

Com podem trobar les asímptotes horitzontals d'una funció?

Una funció té una asímptota horitzontal $\boldsymbol{y=k}$ si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k \quad o\ bé \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = k \quad (o\ els\ dos\ límits\ donen\ k)$$

Llavors:

- Si la funció és polinòmica: No pot tenir asímptotes horitzontals ja qualsevol d'aquests límits dóna $+\infty$ o $-\infty$
- Si la funció és racional: és a dir del tipus $\frac{p(x)}{q(x)}$ on p(x) i q(x) són polinomis, aleshores dependrà del grau dels polinomis.

Exemple :

$$f(x) = \frac{6x-2}{1-2x} \to \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x-2}{1-2x} = -3 \Rightarrow \ y = -3\ és\ A.H$$

$$g(x) = \frac{2x}{x^2-3} \to \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2-3} = 0 \Rightarrow \ y = 0\ és\ A.H$$

$$h(x) = \frac{2x^3-4}{x^2-3} \to \lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3-4}{x^2-3} = \pm\infty \Rightarrow \ h(x)\ NO\ té\ A.H$$

- Si en l'expressió de la funció hi ha una expressió exponencial: cal tenir en compte que

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & si\ a > 1 \\ 0 & si\ 0 < a < 1 \end{cases} \qquad i \qquad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}}$$

Exemple :

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0 \Rightarrow \ y = 0 \quad A.H\ de\ f(x)\ en\ +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}} = \frac{1}{0} = +\infty \Rightarrow \ No\ hi\ ha\ A.H\ en\ +\infty$$