

Resum Geometria i Programació lineal

Sitio: [Cursos IOC - Batxillerat](#)

Imprimido por: Invitado

Curso: Matemàtiques aplicades a les Ciències socials
(autoformació IOC)

Día: viernes, 11 de febrero de 2022, 21:15

Libro: Resum Geometria i Programació lineal

Descripción

Programació lineal



Tabla de contenidos

1. Punts i vectors**2. Equacions de la recta****3. Qüestions bàsiques de geometria****4. Exemples trobar equació recta****5. Gràfica d'una recta****6. Equació de la recta que passa per dos punts****7. Inequacions lineals amb una incògnita****8. Inequacions lineals amb dues incògnites****9. Sistemes d'inequacions**

9.1. Exemple

9.2. Problema

10. Problema d'optimització

10.1. Exemple 1

10.2. Exemple 2

10.3. Exemple 3

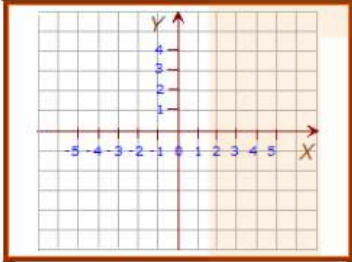
1. Punts i vectors

Punts en un sistema de coordenades cartesianes.

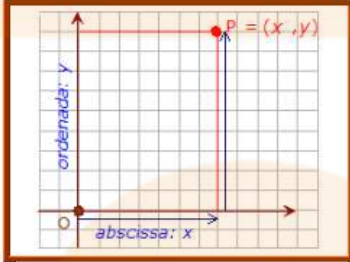
Sistemes de coordenades cartesianes

En general, per situar punts sobre un pla fixarem prèviament *dues rectes perpendiculars* que anomenarem **eixos de coordenades**. A més,

- El punt O, on es tallen, s'anomena **origen de coordenades**.
- Una de les rectes, la que suposem "horitzontal" s'anomena **eix d'abscisses** o eix X
- L'altra recta (suposadament "vertical") s'anomena **eix d'ordenades** o eix Y
- Sobre cada recta marcarem una **escala** amb origen en O, normalment utilitzant unitats de la mateixa grandària (De vegades convé utilitzar unitats diferents).



Eixos de coordenades



Coordenades d'un punt

Un cop fixats els eixos de coordenades, qualsevol punt P pot situar-se coneixent les seves distàncies "signades" als eixos:

- La distància a l'eix Y s'anomena **abscissa** de P o **primera coordenada**, situa P a dreta o esquerra de l'origen (segons el seu signe).
- La distància a l'eix X s'anomena **ordenada** de P o **segona coordenada** i el situa per sobre o per sota de l'origen (segons el seu signe).

Per tal de no confondre ambdues coordenades s'escriuen sempre en forma d'una parella ordenada (x, y) , seguint l'ordre *abscissa-ordenada*...

Recorda! (*abscissa* , *ordenada*) : ,

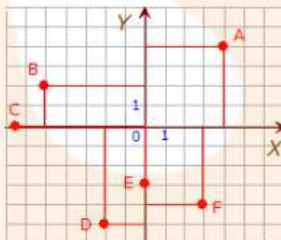
Observa ara els punts de la figura: Veuràs que

$$A = (4, 4) \quad B = (-5, 2) \quad C = (-6, 5, 0)$$

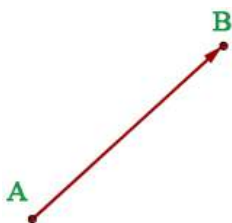
$$D = (-2, -5) \quad E = (0, -3) \quad F = (3, -4)$$

Saps explicar per què els punts C i E tenen una coordenada nul·la?

Observa, a sobre, que les coordenades (x, y) d'un punt P poden interpretar-se com la parella de desplaçaments (horitzontal-vertical) que hauriem de fer per anar de l'origen al punt P.



Un **vector** $\overrightarrow{AB}$ és un segment orientat que va d'un punt A (origen) a un punt B (extrem)



Elements d'un vector:

Direcció: direcció de la recta que el conté.

Sentit: el que va de l'origen a l'extrem.

Mòdul: longitud del segment AB, es representa per $|\overrightarrow{AB}|$

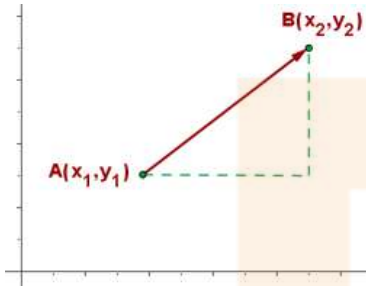
Components d'un vector $\overrightarrow{AB}$

Si les coordenades dels punts A i B són:

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

Les components del vector $\overrightarrow{AB}$ són les **coordenades de l'extrem menys les de l'origen**.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Exemple

Si les coordenades dels punts són:

$$A(4,3) \quad B(9,7)$$

Les components del vector $\overrightarrow{AB}$ són:

$$\overrightarrow{AB} = (9 - 4, 7 - 3) = (5, 4)$$

2. Equacions de la recta

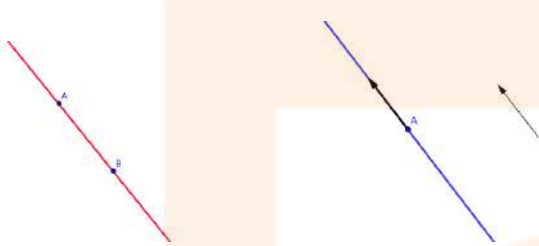
Rectes en el pla

Una recta ve determinada per:

- **Dos punts:** donats dos punts, existeix una única recta que passa per ells

o bé per:

- **Un punt i una direcció:** la direcció pot venir donada pel **vector director**, per l'angle d'inclinació o bé per el pendent de la recta.



Equacions de la recta

Una equació de la recta és una igualtat que verifiquen tots els punts de la recta i només aquests.

Hi ha diferents tipus d'equació de la recta. Depenent de les dades que tinguem, serà més pràctic utilitzar una o altra.

Equació general o implícita

És de la forma:

$$ax + by + c = 0$$

Un vector director de la recta $ax + by + c = 0$ és $(b, -a)$

o dit, d'altre manera:

si el v.d. és $\vec{v}(v_1, v_2)$, llavors l'equació de la recta és $v_2x - v_1y + c = 0$

Equació explícita

Si en l'equació general aïllem la variable y obtenim:

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

el coeficient de la x és el pendent de la recta $m = -\frac{a}{b}$

D'aquesta manera obtenim l'equació:

$$y = mx + n$$

on **m** és el **pendent** de la recta

Observació:

hem dit que si el v.d. és $\vec{v}(v_1, v_2)$, llavors l'equació de la recta és $v_2x - v_1y + c = 0$

aïllant la y tenim:

$$v_2x - v_1y + c = 0 \Rightarrow -v_1y = -v_2x - c$$

$$y = \frac{-v_2}{-v_1}x - \frac{c}{-v_1}$$

Per tant, $m = \frac{v_2}{v_1}$

O sigui, que si el **v.d.** és $\vec{v}(v_1, v_2) \Rightarrow$ pendent $m = \frac{v_2}{v_1}$

Equació contínua

Si tenim el v.d. $\vec{v}(v_1, v_2)$ i un punt $A(a_1, a_2)$ de la recta, l'equació contínua de la recta és:

$$\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2}$$

Aquest tipus d'equació és molt pràctic quan sabem vector director i punt.

Si voleu més informació o exemples, podeu veure els webs:

[Equacions de la recta](#) (on diu "ecuaciones de la recta")

[Tipus d'equacions de la recta](#) (a la dreta teniu l'índex per veure els diferents tipus d'equació)

Pendent i vector director de la recta

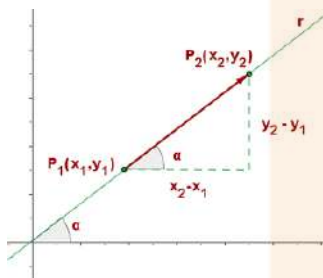
Hem dit que una recta amb vector director $\vec{v}(v_1, v_2)$ té pendent $m = \frac{v_2}{v_1}$

El vector director ens dona la direcció de la recta

El pendent de la recta ens dona la "inclinació" de la recta.

Està clar que la relació entre vector director i pendent és molt estreta.

Si la recta passa pels punts $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$, el seu v.d és el vector que va d'un punt a l'altre



vector director: $\overrightarrow{P_1Q_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Pendent: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Si $P_1(4, 3)$ i $P_2(9, 7)$

el v.d. és $\overrightarrow{P_1Q_1} = (9 - 4, 7 - 3) = (5, 4)$

i el pendent és $m = \frac{4}{5} = 0,8$

(i, si recordeu de trigonometria, això és la tangent de l'angle α)

3. Qüestions bàsiques de geometria

Qüestió 1

Com sabem si un punt és d'una recta $ax+by+c=0$?

Exemple:

Donada la recta r : $3x-2y+1=0$

El punt **(5,1)** és de la recta r ?

substituïm els valors $x=5$, $y=1$ en l'equació de la recta:

$$3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 ?$$

$$15 - 2 + 1 = 0 ? \quad \text{NO} \Rightarrow \text{El punt (5,1) no és de la recta } r$$

El punt **(3,5)** és de la recta r ?

substituïm els valors $x=3$, $y=5$ en l'equació de la recta:

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 1 = 0 ?$$

$$9 - 10 + 1 = 0 ? \quad \text{SI} \Rightarrow \text{El punt (3,5) sí és de la recta } r$$

Qüestió 2

Donats **A(5,3)** i **B(8,1)**, quines són les components del vector **$\overrightarrow{AB}$** ?

$$\overrightarrow{AB} = (8 - 5, 1 - 3) = (3, -2)$$

i el vector **$\overrightarrow{BA}$** ?

$$\overrightarrow{BA} = (5 - 8, 3 - 1) = (-3, 2)$$

són iguals els vectors **$\overrightarrow{AB}$** i el **$\overrightarrow{BA}$** ?

No, no són iguals ja que **$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$** , tenen sentit oposat

Sí tenen la mateixa direcció. Per tant, com a vector director de la recta que passa per A i B podem agafar tant el vector **$\overrightarrow{AB}$** com el **$\overrightarrow{BA}$** (ja que tenen la mateixa direcció)

Qüestió 3

Quin és el vector director de la recta **$2x+3y-1=0$** ?

Recordem que el v.d. de la recta $ax+by+c=0$ és $(-b,a)$

Per tant,

el v.d de $2x+3y-1=0$ és **$\vec{v}(-3,2)$**

i el pendent m de la recta **$2x+3y-1=0$** ?

o bé aïllem y :

$$2x + 3y - 1 = 0$$

$$3y = -2x + 1$$

$$y = \frac{-2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{-2}{3}$$

o també sabent que el vector director és **$\vec{v}(-3,2)$**

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Qüestió 4

Quin és el vector director de la recta $-4x + 6y - 1 = 0$?

Recordem que el v.d. de la recta $ax + by + c = 0$ és $(-b, a)$

Per tant,

el v.d de $-4x + 3y - 1 = 0$ és $\vec{v}(-6, -4)$

Observació:

Com a vector director de la recta també podem agafar el vector:

$\vec{w}(6, 4)$ ja que té la mateixa direcció que el $(-6, -4)$, encara que sentit oposat

o el $\vec{u}(3, 2)$ que té la mateixa direcció i sentit que el $\vec{w}(6, 4)$, però el mòdul (la longitud) és la meitat.

4. Exemples trobar equació recta

Exemple 1 Equació general

Trobar la recta que passa pel punt $P(-1,2)$ i té vector director $\vec{v}(2,-5)$

Recordem: El vector director de la recta $ax+by+c=0$ és $(-b,a)$

o dit d'altra manera:

v.d. $\vec{v}(v_1,v_2)$, l'equació general:

$$v_2x - v_1y + c = 0$$

Per tant, si el vector director és $\vec{v}(2,-5)$ l'equació de la recta serà de la forma:

$$-5x - 2y + c = 0$$

I trobem c perquè la recta passi per $P(-1,2)$, que vol dir que ha de complir l'equació:

$$-5x - 2y + c = 0$$

$$-5 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + c = 0$$

$$5 - 4 + c = 0 \Rightarrow 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$$

Per tant l'equació de la recta és: $-5x - 2y - 1 = 0$

També podem posar tota l'equació canviada de signe:

$$5x + 2y + 1 = 0$$

Exemple 2 Equació contínua

Trobar la recta que passa pel punt $P(-1,2)$ i té vector director $\vec{v}(2,-5)$

Recordem: vector director $\vec{v}(v_1,v_2)$, punt $A(a_1,a_2)$

Equació contínua:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

Per tant:

$$\frac{x - (-1)}{2} = \frac{y - 2}{-5} \Rightarrow \frac{x + 1}{2} = \frac{y - 2}{-5}$$

Observació: d'aquesta equació podem passar fàcilment a l'equació general de l'exemple 1:

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 2}{-5}$$

$$-5 \cdot (x + 1) = 2 \cdot (y - 2)$$

$$-5x - 5 = 2y - 4$$

$$-5x - 2y - 1 = 0$$

$$5x + 2y + 1 = 0$$

Exemple 3 Equació explícita

Trobar la recta que passa pel punt $P(-1,2)$ i té vector director $\vec{v}(2,-5)$

Recordem: v.d. és $\vec{v}(v_1,v_2) \Rightarrow$ pendent $m = \frac{v_2}{v_1}$

Equació explícita:

$$y = mx + n$$

Per tant, v.d $\vec{v}(2, -5) \Rightarrow \text{pendent } m = \frac{-5}{2}$

L'equació implícita serà de la forma:

$$y = \frac{-5}{2}x + n$$

Troblem la n sabent que el punt $P(-1, 2)$ és de la recta:

$$y = \frac{-5}{2}x + n$$

$$2 = \frac{-5}{2} \cdot (-1) + n \Rightarrow 2 = \frac{5}{2} + n \Rightarrow n = 2 - \frac{5}{2}$$

$$n = -\frac{1}{2}$$

Per tant:

$$y = \frac{-5}{2}x - \frac{1}{2}$$

Exemple 4

Trobar la recta que passa pel punt $P(7, -1)$ i té pendent 5.

En aquest cas l'equació més pràctica serà l'explícita:

$$y = mx + n$$

Com que directament ens donen la dada del pendent, $m=5$, tenim:

$$y = 5x + n$$

Passa pel punt $P(7, -1)$

$$-1 = 5 \cdot 7 + n$$

$$-n = 35 + 1$$

$$n = -36$$

Equació de la recta: $y = 5x - 36$

o també podem expressar l'equació general que, simplement, és igualant a zero:

$$y = 5x - 36$$

$$-5x + y + 36 = 0$$

5. Gràfica d'una recta

Per dibuixar una recta, primer de tot heu de tenir clar com representem un punt $P(x,y)$. En aquest enllaç podeu veure la representació de punts en uns eixos de coordenades: [Punts i vectors](#)

Com trobem punts d'una recta?

Volem obtenir punts (x,y) , o sigui, parells de valors de x i y que satisfacin l'equació de la recta.

Una recta té infinits punts. Podem donar el valor qualsevol a una de les variable i trobar el valor de l'altre variable per tal es satisfaci l'equació.

Exemple 1

Troblem punts de la recta $3x - 2y + 1 = 0$

Podem donar valors a la variable x i trobar el valor de y :

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow 4 - 2y = 0 \Rightarrow -2y = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \text{Punt } (1,2)$$

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow 3 \cdot 5 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow 16 - 2y = 0 \Rightarrow -2y = -16 \Rightarrow y = \frac{-16}{-2} = 8 \Rightarrow \text{Punt } (5,8)$$

O podem donar valors a la variable y i trobar el valor de x :

$$\text{Si } y = 3 \Rightarrow 3x - 2 \cdot 3 + 1 = 0 \Rightarrow 3x - 6 + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3} \Rightarrow \text{Punt } \left(\frac{-5}{3}, 3\right)$$

Exemple 2

recta $y = 3x + 1$

Per exemple, podem trobar el punt amb $x=0$,

Substituïm aquest valor $x=0$ en l'equació:

$$\begin{aligned} y &= 3x + 1 \\ y &= 3 \cdot 0 + 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

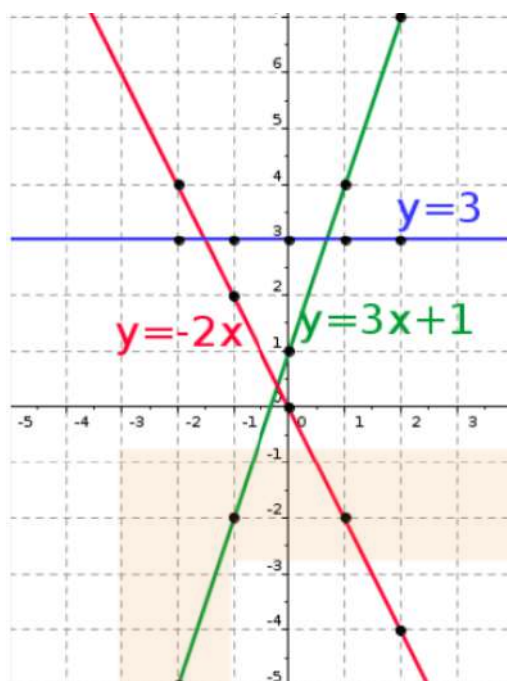
Per tant tenim el punt $(0,1)$

De fet amb trobar dos punts tenim suficient per dibuixar la recta

En la taula següent trobem diversos punts de cada recta, donant diferents valors a la x i trobant la y corresponent:

$y=3x+1$		$y=-2x$		$y=3$	
x	y	x	y	x	y
-2	-5	-2	4	-2	3
-1	-2	-1	2	-1	3
0	1	0	0	0	3
1	4	1	-2	1	3
2	7	2	-4	2	3

Amb aquest punts de cada recta, dibuixem les rectes:



i en aquest enllaç podeu veure com, donat un sistema de dues equacions amb dues incògnites, podem trobar la solució gràficament dibuixant les dues rectes. El punt solució del sistema és el punt de tall (o punt intersecció) de les dues rectes:

[dibuixar rectes](#)

6. Equació de la recta que passa per dos punts

Veurem diferents maneres de trobar l'equació de la recta que passa per dos punts:

Exemple 1

Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts A(2,1) i B(-3,5)

Volem trobar l'equació del tipus $y = mx + n$

O sigui, hem de trobar m i n

Que els punts siguin de la recta vol dir que han de verificar l'equació:

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ A(2,1) &\Rightarrow 1 = 2m + n \\ A(-3,5) &\Rightarrow 5 = -3m + n \end{aligned}$$

Ara tenim plantejat un sistema d'equacions on les incògnites són m i n

Ho fem per reducció, simplement canviem el signe de la 2a equació i sumem les dues equacions:

$$\begin{array}{r} 1 = 2m + n \\ + \\ -5 = 3m - n \\ \hline -4 = 5m \end{array} \Rightarrow m = -\frac{4}{5}$$

(m és el pendent de la recta)

I substituint aquest valor en la primera equació $1 = 2m + n$ obtenim n :

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot -\frac{4}{5} + n \\ 1 &= -\frac{8}{5} + n \\ -n &= -1 - \frac{8}{5} = \frac{-5-8}{5} = \frac{-13}{5} \\ n &= \frac{13}{5} \end{aligned}$$

Per tant, l'equació de la recta és: $y = -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$

Observacions:

- El pendent de la recta és m . Aquesta recta té pendent $-4/5$
- A partir d'aquesta equació podem obtenir l'equació general de la recta:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{5}x + \frac{13}{5} \\ 5y &= -4x + 13 \\ 4x + 5y - 13 &= 0 \end{aligned}$$

Exemple 2

Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts A(2,1) i B(-3,5)

Un vector director de la recta serà $\overrightarrow{AB} = (-3-2, 5-1) = (-5,4)$

Ara amb el v.d $\vec{v} = (-5,4)$ i el punt $A(2,1)$ ja podem expressar l'equació continua:

selectivitat.io

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{4}$$

O si volem l'equació general:

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y-1}{4}$$

$$4(x-2) = -5(y-1)$$

$$4x-8 = -5y+5$$

$$4x+5y-13=0$$

Observacions:

- Fixeu-vos que aïllant la variable y d'aquesta última equació, obtenim l'equació explícita trobada en l'exemple 1.
- Per expressar l'equació explícita hem agafat el punt A, també podríem haver agafat el punt B (el resultat seria el mateix).



7. Inequacions lineals amb una incògnita

Definició.

Una **inequació** és una desigualtat entre dues expressions algebraïques, anomenades membre de la inequació.

Els valors de les incògnites que fan que sigui certa la desigualtat són les solucions de la inequació.

Diem que dues inequacions són equivalents si tenen el mateix conjunt solució.

Una **inequació lineal amb una incògnita** és una equació equivalent a

$$ax < b \text{ o } ax \leq b \text{ o } ax > b \text{ o } ax \geq b$$

Propietats.

- Si sumem o restem una mateixa expressió polinòmica al dos membre de la inequació, obtenim una inequació equivalent.

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

- Si multipliquem o dividim per un nombre positiu els dos membres d'una inequació, obtenim una inequació equivalent.

$$a < b \text{ i } c > 0 \Rightarrow ac < bc$$

Exemple:

$$5x < 3 \rightarrow \frac{1}{5} \cdot 5x < \frac{1}{5} \cdot 3 \rightarrow x < \frac{3}{5}$$

- Si multipliquem o dividim per un nombre negatiu els dos membres d'una inequació, per obtenir una inequació equivalent hem d'invertir el sentit de la desigualtat.

$$a < b \text{ i } c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

Exemple:

$$-5x < 3 \rightarrow \frac{1}{-5} \cdot 5x > \frac{1}{-5} \cdot 3 \rightarrow x > -\frac{3}{5}$$

Solucions.

El conjunt de solucions el podem expressar en forma d'interval o fent la representació gràfica.

Exemple:

$$x > a$$



$$(a, +\infty)$$

8. Inequacions lineals amb dues incògnites

És una expressió equivalent a

$$ax + by < c$$

amb qualsevol de les desigualtats $<$, $\leq$, $>$, $\geq$

Solucions

La solució és un semiplà. Hem de representar gràficament aquest semiplà.

Exemple:

$$2x + y \leq 3$$

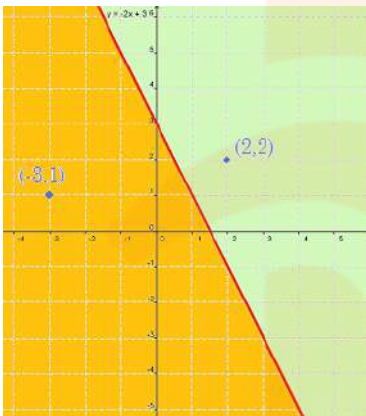
Dibuixem la recta $2x + y = 3$

Per dibuixar-la trobem dos punts qualssevol de la recta:

$$x=0 \rightarrow 0+y=3 \rightarrow y=3 \rightarrow (0,3)$$

$$x=1 \rightarrow 2+y=3 \rightarrow y=1 \rightarrow (1,1)$$

Aquesta recta divideix al pla en dos semiplans. La recta és la frontera d'aquests semiplans.



Els punts de la recta verifiquen $y = -2x + 3$

Els punts d'un semiplà verifiquen $y < -2x + 3$ i els de l'altre semiplà verifiquen $y > -2x + 3$

Per saber quin semiplà correspon a cada inequació agafem un punt de cada semiplà i veiem quina desigualtat compleix.

Veiem, per exemple, que el punt $(-3,1)$ compleix $y < -2x + 3$. Tots els punts que es troben en el mateix semiplà que el $(-3,1)$

compliran $y < -2x + 3$

Tots els punts de l'altre semiplà compliran la desigualtat $y > -2x + 3$. Per exemple, ho podem veure amb el punt

És molt pràctic mirant-ho amb el punt (0,0):

Substituïm el $(0,0)$ en la inequació i mirem si la compleix o no :

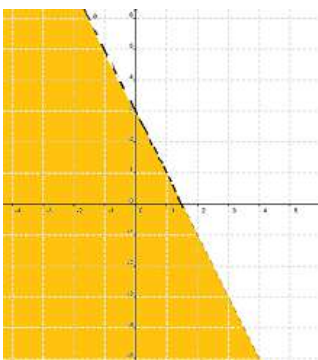
En aquest cas veiem que el $(0,0)$ compleix $2 \cdot 0 + 0 < 3$, per tant compleix la inequació.

Per tant, el semiplà solució és el semiplà que conté al punt $(0,0)$. En el dibuix ho hem indicat en groc.

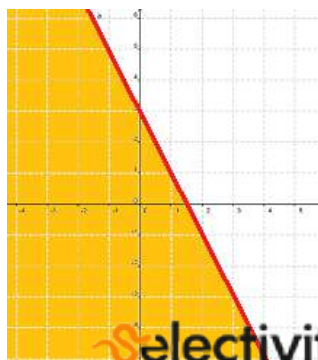
Quan la desigualtat sigui estricta vol dir que la solució no inclou als punts de la recta i, llavors, la dibuixarem amb un traç continu.

Indiquem en groc el semiplà solució de les corresponents inequacions.

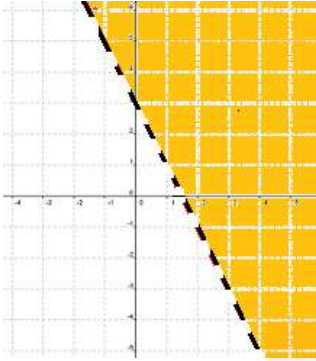
$$y < -2x + 3$$



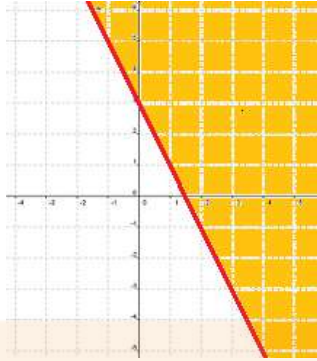
$$y \leq -2x + 3$$



$$y > -2x + 3$$



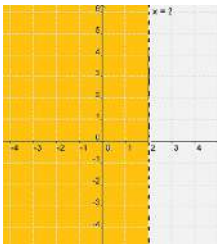
$$y \geq -2x + 3$$



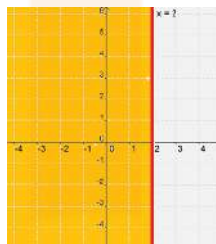
Casos particulars.

Si estem treballant amb dues variables però tenim desigualtats amb una única variable, veiem gràficament el semiplà solució:

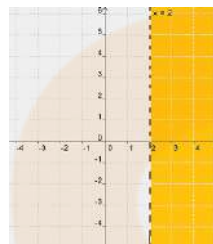
Exemples:



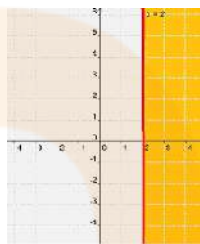
$$x < 2$$



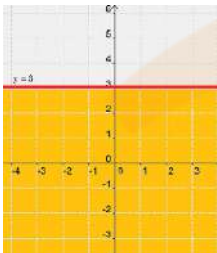
$$x \leq 2$$



$$x > 2$$



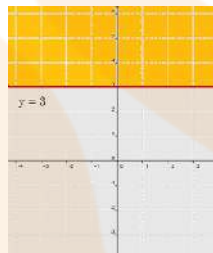
$$x \geq 2$$



$$y < 3$$



$$y \leq 3$$



$$y > 3$$



$$y \geq 3$$

9. Sistemes d'inequacions

Un sistema d'inequacions lineal amb dues variables és de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y < c_1 \\ a_2x + b_2y < c_2 \end{cases}$$

(amb qualsevol de les desigualtats $<$, $\leq$, $>$, $\geq$)

Ho resollem gràficament.

Dibuixem, en uns mateixos eixos de coordenades, el semiplà solució de cada inequació

La solució del sistema serà la regió intersecció dels dos plans.

Observeu que pot ser que un sistema d'inequacions no tingui solució. Això passarà quan els dos semiplans no tinguin cap punt en comú.

9.1. Exemple

Exemple

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 1 \\ x - y > 3 \end{cases}$$

Hem de dibuixar les dues rectes $2x+3y=1$ i $x-y=3$ en uns mateixos eixos de coordenades.
Per dibuixar-les trobem dos punts de cada recta.

Recta $2x+3y=1 \rightarrow (0, 1/3), (1/2, 0)$

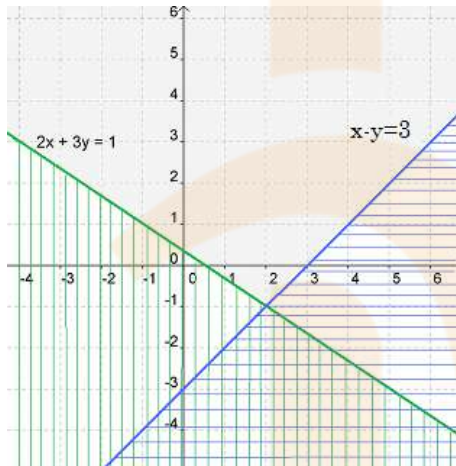
Recta $x-y=3 \rightarrow (0, -3), (3, 0)$

Ratllem en verd la solució de la inequació $2x+3y \leq 1$

Podem veure que el punt $(0,0)$ SÍ compleix la inequació, ja que $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 1$
Per tant el semiplà solució és en el qual es troba el $(0,0)$

Ratllem en blau la solució de la inequació $x-y > 3$

Podem veure que el punt $(0,0)$ NO compleix la inequació, ja que $0 - 0 < 3$
Per tant el semiplà solució és en el qual no es troba el $(0,0)$



La regió solució és la regió ratllada tant de blau com de vermell.

veiem que en aquest cas és una regió oberta.

9.2. Problema

Passos a seguir per resoldre un problema mitjançant un sistema d'inequacions:

- Llegir atentament l'enunciat.
- Escollir les incògnites.
- Traduir cada condició (o restricció) del problema en una inequació, obtenint un sistema d'inequacions.
- Resoldre el sistema d'inequacions indicant la regió solució.
- Obtenir les solucions i comprovar-les.

Exemple

Disposem d'un màxim de 55€ i hem de comprar al menys 5 bolígrafs i 5 carpetes. Cada bolígraf costa 3€ i cada carpeta 5€. Troba totes les opcions de compra.

Solució

bolígrafs: x

carpetes: y

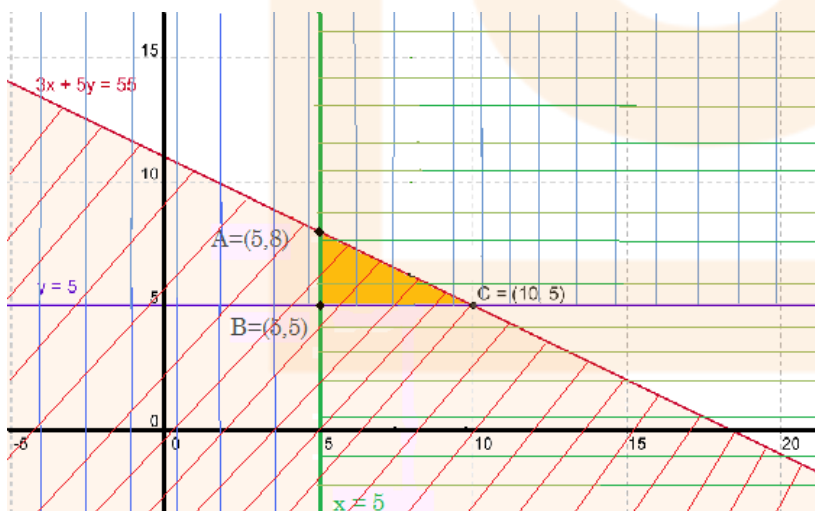
$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 55 \\ x \geq 5 \\ y \geq 5 \end{cases}$$

Hem de dibuixar, en uns mateixos eixos de coordenades, les tres rectes $3x+5y=55$, $x=5$ (recta vertical) i $y=5$ (recta horitzontal) i veure amb quin semiplà ens quedem.

La intersecció d'aquest semiplans és la regió solució. En aquest cas és un triangle.

els vèrtexs del qual són els punts d'intersecció de les rectes dos a dos.

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} 3x+5y=55 \\ x=5 \end{matrix} \right\} &\rightarrow A(5,8) & \left. \begin{matrix} 3x+5y=55 \\ y=5 \end{matrix} \right\} &\rightarrow C(10,5) & \left. \begin{matrix} x=5 \\ y=5 \end{matrix} \right\} &\rightarrow B(5,5) \end{aligned}$$



Les solucions de x , y seran els punts (x,y) que es troben dins del triangle solució.

En general, per indicar la solució del sistema serà suficient amb marcar la regió solució en el dibuix.

En aquest cas hem d'afinar més si tenim en compte que, com que parlem de nombre de bolígrafs (x) i nombre de carpetes (y), les solucions han de ser nombres naturals:

Troblem els vèrtex de la regió solució. Són els punts d'intersecció de les rectes dos a dos.

$$\left. \begin{array}{l} 3x+5y=55 \\ x=5 \end{array} \right\} \rightarrow A(5,8) \quad \left. \begin{array}{l} 3x+5y=55 \\ y=5 \end{array} \right\} \rightarrow C(10,5) \quad \left. \begin{array}{l} x=5 \\ y=5 \end{array} \right\} \rightarrow A(5,5)$$

En aquest cas els vèrtex A i C no són solució ja que la desigualtat és estricta (els punts de la recta $3x+5y=55$ no són solució).

Els punts amb coordenades enteres que estan en la regió solució són:

(5,5), (6,5), (7,5), (8,5), (9,5)	5 carpetes i entre 5 i 9 bolígrafs
(5,6), (6,6), (7,6)	6 carpetes i entre 5 i 7 bolígrafs
(5,7), (6,7)	7 carpetes i 5 o 6 bolígrafs
(5,8)	8 carpetes i 5 bolígrafs.



10. Problema d'optimització

Resoldre un problema de programació lineal consisteix a **optimitzar** (maximitzar o minimitzar) una funció lineal, anomenada **funció objectiu**, subjecta a unes restriccions expressades mitjançant un sistema d'inequacions lineal.

Passos a seguir:

- Llegir atentament l'enunciat i escollir les incògnites.
- Resoldre el sistema d'inequacions format per les restriccions. A la regió solució del sistema l'anomenem **regió factible**.
- Obtenir els vèrtexs de la regió factible.
- Calcular el valor de la funció objectiu en cadascun dels vèrtexs per tal de determinar en quin pren el valor màxim o mínim.



10.1. Exemple 1

Una empresa fabrica ordinadors portàtils i de sobretaula i ven tots els que fabrica. L'empresa té capacitat per a fabricar 3000 ordinadors. Per qüestions de mercat, el nombre d'ordinadors de sobretaula no pot ser inferior a la meitat del nombre de portàtils, però tampoc pot superar el nombre de portàtils. L'empresa guanya 100 € per cada ordinador de sobretaula, i un 20% més en la venda de cada portàtil.

a) Escriu el sistema d'inequacions que satisfà les restriccions del problema.

Anomenem x al nombre d'ordinadors de sobretaula, i y al de portàtils.

Restriccions:

- L'empresa té capacitat per a fabricar 3000 ordinadors $\Rightarrow x + y \leq 3000$
- El nombre d'ordinadors de sobretaula no pot ser inferior a la meitat del nombre de portàtils. $\Rightarrow x \geq \frac{y}{2}$
- El nombre d'ordinadors no pot superar el nombre de portàtils. $\Rightarrow x \leq y$

Sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} x + y \leq 3000 \\ x \geq \frac{y}{2} \\ x \leq y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

b) dibuixa la regió factible i troba els seus vèrtex.

Dibuixem les rectes

$$x + y = 3000 \rightarrow \text{punts } (3000, 0), (0, 3000)$$

$$x = y/2 \rightarrow \text{punts } (0, 0), (1000, 2000)$$

$$x = y \rightarrow \text{punts } (0, 0), (1000, 1000)$$

Cadascuna d'aquestes rectes divideix al pla en dos semiplans. Hem de mirar quins semiplans compleixen les inequacions.

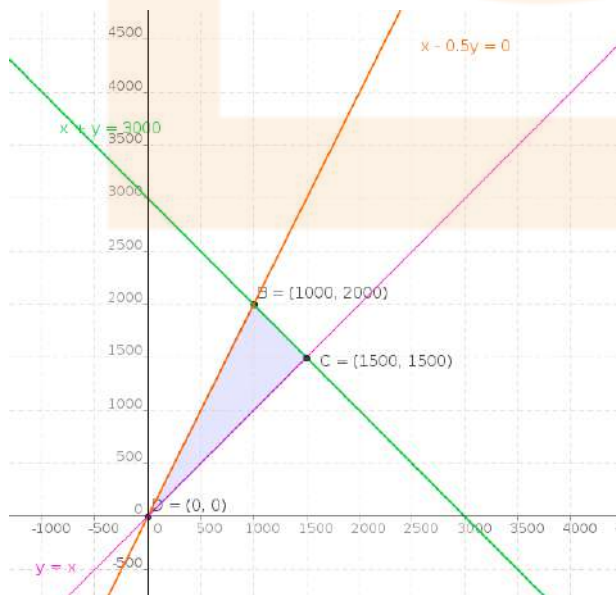
$x + y \leq 3000$ Podem veure que el $(0, 0)$ compleix la inequació. Per tant és el semiplà on es troba el $(0, 0)$

$x \geq \frac{y}{2}$ En aquest cas com que el $(0, 0)$ és de la recta, agafem altre punt. Per exemple, el $(1000, 0)$.

Veiem que $1000 \geq \frac{0}{2}$ Per tant, és el semiplà on es troba el punt $(1000, 0)$

$x \leq y$ Agafem, per exemple, el $(1000, 0)$.

Com que $1000 > 0$, no compleix la inequació. El pla solució no és el pla on es troba el punt $(1000, 0)$



En aquest cas la regió factible és l'interior d'aquest triangle i trobem els seus vèrtexs.

$$\begin{cases} x + y = 3000 \\ x = \frac{y}{2} \end{cases} \rightarrow y = 2x$$

$$x + 2x = 3000 \rightarrow 3x = 3000 \rightarrow x = 1000$$

B(1000, 2000)

$$\begin{cases} x + y = 3000 \\ x = y \end{cases}$$

$$x + x = 3000 \rightarrow 2x = 3000 \rightarrow x = 1500$$

C(1500, 1500)

I l'altre vèrtex serà òbviament el **D(0,0)**

c) Quants ordinadors de cada classe ha de fabricar per tal de maximitzar els seus beneficis?

La funció objectiu és: **$F(x,y) = 100x + 120y$**

En aquest cas volem un màxim d'aquesta funció.

Avaluem aquesta funció en cadascun dels vèrtexs:

$$F(1000,2000) = 100 \cdot 1000 + 120 \cdot 2000 = 100000 + 240000 = \mathbf{340000}$$

$$F(1500,1500) = 100 \cdot 1500 + 120 \cdot 1500 = 150000 + 180000 = 330000$$

$$F(0,0) = 100 \cdot 0 + 120 \cdot 0 = 0$$

Per tant el màxim benefici s'obté fabricant 1000 ordinadors portàtils i 2000 de sobretaula.

10.2. Exemple 2

Una empresa de confecció produeix abrics i vestits. Per a la confecció de cada abric es necessiten 6 hores de treball i 2m de roba i per a la confecció d'un vestit 3 hores de treball i 4 m de roba. cada abric produeix un benefici de 80 € i cada vestit un benefici de 50 €. L'empresa disposa de 2850 hores de treball i de 1700 m de roba.

a) Escriu el sistema d'inequacions que satisfà les restriccions del problema.

	hores de treball	metres de roba	benefici
abrics	6	2	80
vestits	3	4	50
	2850	1700	

Anomenarem x al nombre d'abric, i y al de vestits.

Sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} 6x + 3y \leq 2850 \\ 2x + 4y \leq 1700 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{o be} \quad \begin{cases} 2x + y \leq 950 \\ x + 2y \leq 850 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

b) Dibuixa la regió factible i troba els seus vèrtex.

Dibuixem les rectes

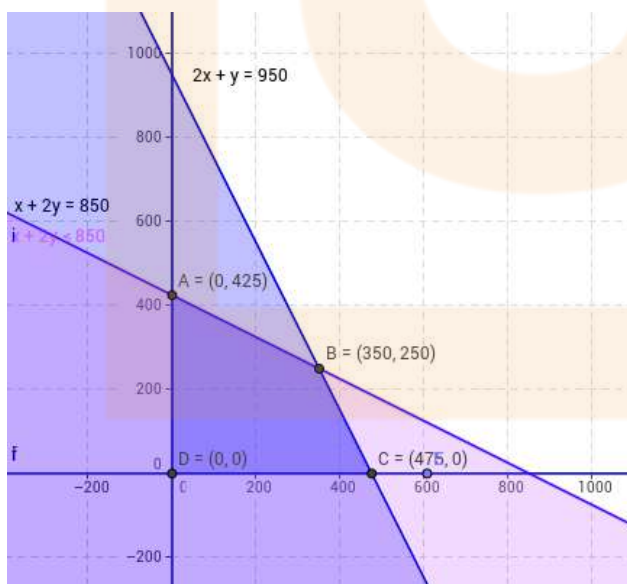
$$2x + y = 950 \rightarrow \text{punts } (475, 0), (0, 950)$$

$$x + 2y = 850 \rightarrow \text{punts } (0, 425), (850, 0)$$

Cadascuna d'aquestes rectes divideix al pla en dos semiplans. Hem de mirar quins semiplans compleixen les inequacions.

$2x + y \leq 950$ Podem veure que el $(0,0)$ compleix la inequació. Per tant és el semiplà on es troba el $(0,0)$

$x + 2y \leq 850$ Podem veure que el $(0,0)$ compleix la inequació. Per tant és el semiplà on es troba el $(0,0)$



En aquest cas la regió factible és l'interior d'aquest polígon. Trobem els seus vèrtexs.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y = 950 \\ x + 2y = 850 \end{cases} &\rightarrow y = 950 - 2x \\ &x + 2 \cdot (950 - 2x) = 850 \\ &x + 1900 - 4x = 850 \rightarrow -3x = -1050 \rightarrow x = 350 \\ &y = 950 - 2 \cdot 350 = 950 - 700 = 250 \end{aligned}$$

B(350, 250)

Veient el dibuix els altres vèrtexs són obvis. Per tant tenim que els vèrtex de la regió factible són:

A(0,425), B(350,250), C(475,0), D(0,0)

c) Quants abrics i vestits cal fabricar per obtenir el benefici màxim?

La funció objectiu és: **$F(x,y) = 80x + 50y$**

En aquest cas volem un màxim d'aquesta funció.

Avaluem aquesta funció en cadascun dels vèrtexs:

$$F(0,425) = 80 \cdot 0 + 50 \cdot 425 = 21750$$

$$F(350,250) = 80 \cdot 350 + 50 \cdot 250 = 28000 + 12500 = \mathbf{40500}$$

$$F(475,0) = 80 \cdot 475 + 50 \cdot 0 = 38000$$

$$F(0,0) = 80 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$$

Per tant **el màxim benefici s'obté fabricant 350 abrics i 250 vestits.**

10.3. Exemple 3

Exemple en vídeo

Vídeo

Problema de programació lineal

