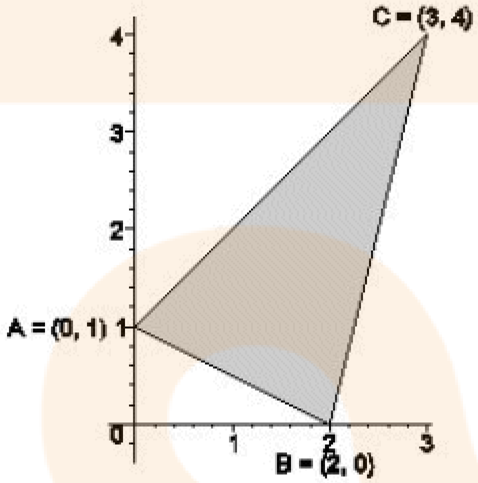
1 Trobeu un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle de vèrtexs (0, 1), (2, 0) i (3, 4).

Resolució:

Dibuixem la regió triangular



La recta AC té ordenada a l'origen 1 i pendent 1. La seva equació és $y = x + 1$, i la regió factible que delimita serà $y \leq 1 + x$.

La recta AB té ordenada a l'origen 1 i pendent $-\frac{1}{2}$. La seva equació és $y = -\frac{1}{2}x + 1$, i la regió factible que delimita serà $y \geq -\frac{1}{2}x + 1$.

La recta BC passa pel punt (2,0) i té pendent 4. La seva equació és $y = 4(x-2)$, i la regió factible que delimita serà $y \geq 4(x-2)$. El sistema demanat és:

$$\boxed{\begin{cases} y & \leq & x+1 \\ y & \geq & -\frac{1}{2}x+1 \\ y & \geq & 4x-8 \end{cases}}$$

2 Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y & \leq & 8 \\ x+y & \geq & 5 \\ x-5y & \leq & 0 \end{array}\right\}$$

a) Resoleu-lo gràficament.
b) Trobeu-ne totes les solucions enteres.

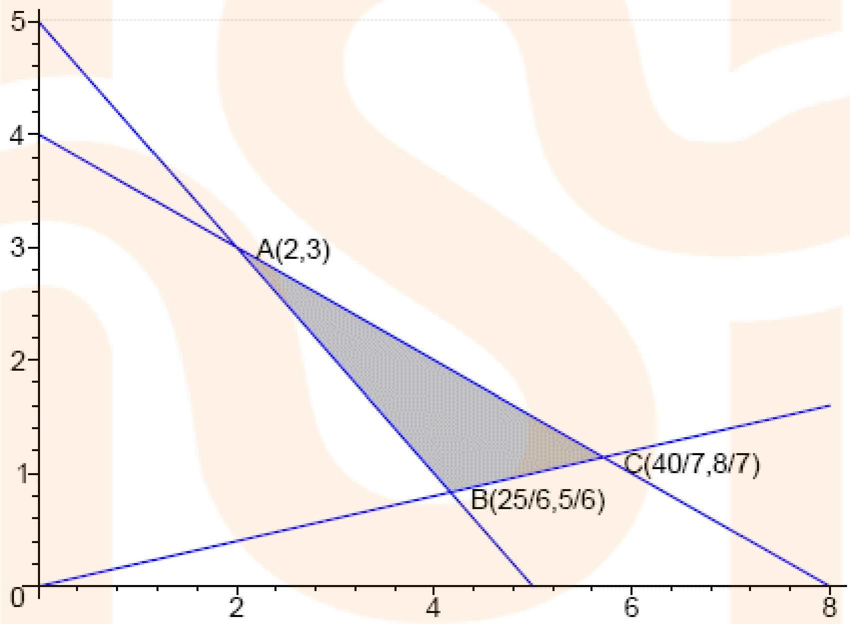
(2 punts)

Resolució:

a) Els punts d'intersecció dels costats són:

$$A:\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 8 \\ x+y & = & 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=3 \\ x=2 \end{array}\right\} \quad B:\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 5 \\ x-5y & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{5}{6} \\ x=\dfrac{25}{6} \end{array}\right\} \quad C:\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 8 \\ x-5y & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{8}{7} \\ x=\dfrac{40}{7} \end{array}\right\}$$

El gràfic de la regió factible és:



b) Per determinar les solucions enteres fixem el mínim valor enter de y factible que és $y=1$ i posem les condicions sobre les x. Resulten:

$$y=1 \quad \left.\begin{array}{l} x\leq 6 \\ x\geq 4 \\ x\leq 5 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{(4,1)} \text{ i } \boxed{(5,1)}; \qquad y=2 \quad \left.\begin{array}{l} x\leq 4 \\ x\geq 3 \\ x\leq 10 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{(3,2)} \text{ i } \boxed{(4,2)};$$

$$y=3 \quad \left.\begin{array}{l} x\leq 2 \\ x\geq 2 \\ x\leq 15 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{(2,3)}.$$ Aquestes són les úniques solucions enteres.

4 Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-y+1 & \geq & 0 \\ x+y & \geq & 1 \\ 5x+y & \leq & 13 \end{array}\right\}$$

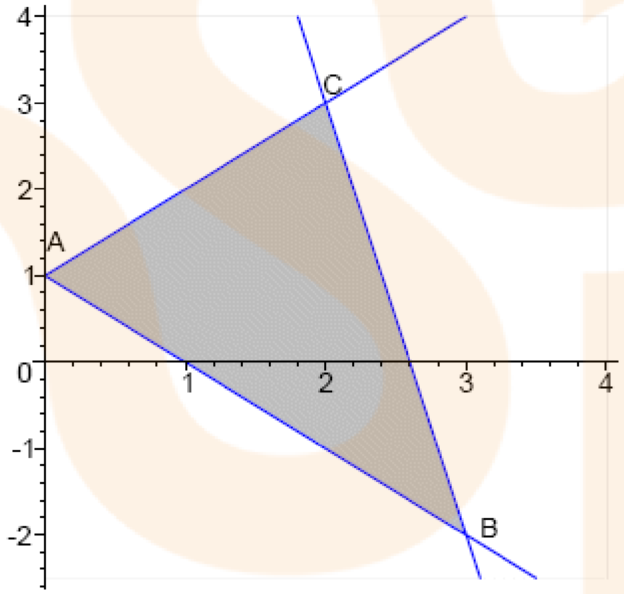
a) Representeu gràficament la regió factible.
b) Calculeu el màxim de la funció $f(x, y) = x - 3y$ en aquesta regió.

Resolució:

a) Trobem els punts d'intersecció:

$A:\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & -1 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right\} \to A(0,1)$ $\quad B:\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ 5x+y & = & 13 \end{array}\right\} \to B(3,-2)$

$C:\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & -1 \\ 5x+y & = & 13 \end{array}\right\} \to A(2,3)$. Representem la regió factible:



b) Trobem el màxim de $f(x,y) = x - 3y$ a la regió factible. Fem la taula:

	A(0,1)	B(3,-2)	C(2,3)
$3x+4y=200$	-3	9	-7
		màxim	

Per tant el $\boxed{\text{màxim és 9 i s'obté en el punt B(3,-2)}}$.

5 Una empresa de mobles fabrica dos models d'armaris, A i B. Per al model A calen 5 h 30 min de feina i 2 m de fusta. Per al model B calen 4 h de feina i 3 m de fusta. L'empresa no pot fabricar més de 430 armaris per setmana, disposa de 2 800 h de feina i de 1 200 m de fusta. Els armaris de tipus A i B proporcionen, respectivament, 250 € i 310 € de benefici cadascun. Determineu el nombre d'armaris de cada tipus que s'han de fabricar per a obtenir el benefici màxim.

Resolució:

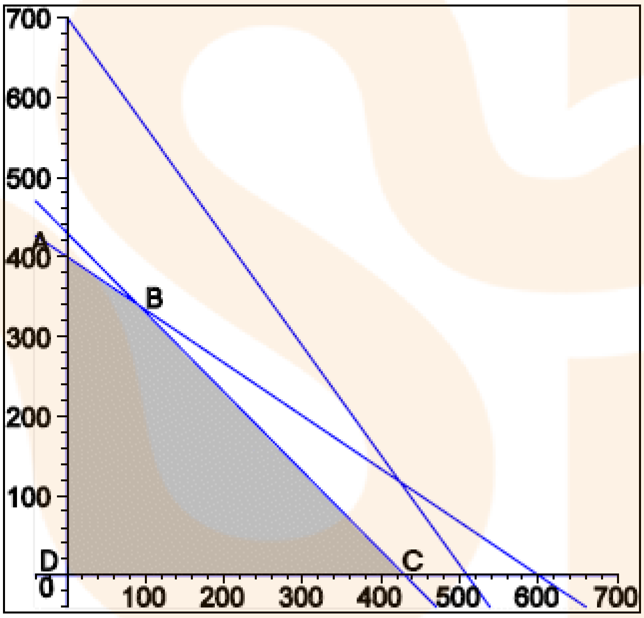
Anomenem x i y als nombres d'armaris de tipus A i B que es fabriquen.
Les condicions estan resumides en la taula següent:

		Feina (hores)	Fusta (m^2)
Model A	x	5.5	2
Model B	y	4	3
màxim	430	2800	1200

Per tant les condicions són:

$$\begin{cases} x+y & \leq & 430 \\ 5.5x+4y & \leq & 2800 \\ 2x+3y & \leq & 1200 \\ x\geq 0; & & y\geq 0 \end{cases}$$

La gràfica corresponent és:



Els vèrtexs de la regió factible són:

$$A:\begin{Bmatrix} x & = & 0 \\ 2x+3y & = & 1200 \end{Bmatrix}\rightarrow A(0,400) \quad B:\begin{Bmatrix} 2x+3y & = & 1200 \\ x+y & = & 430 \end{Bmatrix}\rightarrow B(90,340)$$

$$C:\begin{Bmatrix} x+y & = & 430 \\ y & = & 0 \end{Bmatrix}\rightarrow C(430,0), \qquad D(0,0)$$

La funció benefici a maximitzar és: $f(x,y)=250x+310y$. Tenim:

	A(0,400)	B(90,340)	C(430,0)	D(0,0)
$f(x,y)=250x+310y$	124000	127900	107500	0
		màxim		

Per tant el $\boxed{\text{benefici màxim és 127900 € i s'obté fent 90 armaris de tipus A i 340 armaris de tipus B}}$.