2 Considereu la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

b) Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els extrems, si n'hi ha.

(2 punts)

Resolució:

a) La funció derivada és $f'(x) = \dfrac{2x(2x-1)-2x^2}{(2x-1)^2} = \dfrac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$

Per tant: $f(2) = \dfrac{4}{3}$ i $f'(2) = \dfrac{4}{9}$, i la recta tangent té per equació:

$$y = \frac{4}{3} + \frac{4}{9}(x-2) \rightarrow \boxed{4x - 9y + 4 = 0}$$

b) La derivada s'anul·la per $x = 0$ i per $x = 1$. Els intervals de creixement i decreixement i els extrems són doncs:

	$x<0$	$x=0$	$0<x<1;\quad x \neq \frac{1}{2}$	$x=1$	$x>1$
	$f'>0$	$f'=0$	$f'<0$	$f'=0$	$f'>0$
f	creix	màx	decreix	min	creix
f		0		1	

El tipus d'extrem es pot determinar directament a partir del creixement i decreixement al voltant i per tant no és necessari calcular la derivada segona.

3 La funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ té un màxim en el punt $(1, 4)$ i passa pel punt $(3, 0)$. Trobeu a, b i c.

(2 punts)

Resolució:

a) La funció derivada és $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

L'extrem relatiu en el punt (1,4) dóna dues condicions:

passa pel punt i per tant $a+b+c=4$

la derivada val 0 i per tant $3a+2b+c=0$

Com que també passa pel punt (3,0) resulta $27a+9b+3c=0$, i simplificant-la $9a+3b+c=0$

Escrivim la matriu ampliada del sistema i reduïm per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 36 \end{array}\right)$$

d'on obtenim

$$\begin{cases} c = 9 \\ b = 12-18 = -6 \\ a = 4-9+6 = 1. \end{cases}$$

La funció és doncs, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Nota: La funció derivada és $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ i la derivada segona és $f''(x) = 6x - 12$. Per tant $f(1) = 4$, $f'(1) = 0$ i $f''(1) = -6$. Per tant, la funció té un màxim en el punt (1,4).

4 En els sis primers mesos, des que va obrir, una llibreria ha anat anotant el nombre de compradors de cada mes. Aquest nombre $N(x)$ es pot ajustar per la funció $N(x) = \dfrac{1000x - 600}{x}$, essent x el número del mes comptat des que van obrir.

a) Quants compradors van tenir el segon mes? En quin mes, comptat a partir de l'obertura, van tenir 900 compradors?

b) Suposem que aquesta fórmula serveix per predir el nombre de compradors en el futur. Podem assegurar que aquest nombre sempre anirà en augment? Expliqueu detalladament el perquè de la vostra resposta.

Puntuació: a) 1 punt; b) 1 punt. Total: 2 punts.

Resolució:

a) $N(2) = \dfrac{1000 \cdot 2 - 600}{2} = 700$. Per trobar en quin mes van comprar 900 persones fem $N(x) = \dfrac{1000x - 600}{x} = 900$ i resolem l'equació: $1000x - 600 = 900x$. El resultat és $x = 6$.

b) La derivada és $N'(x) = \dfrac{600}{x^2} > 0$ que sempre és positiva. Per tant el nombre de compradors sempre anirà en augment.

Tenint en compte que $\lim_{x\to\infty} N(x) = 1000$, això vol dir que la corba té una asímptota horitzontal i que el nombre de compradors tendirà a ser 1000 quan s'arribi a la saturació.

6 Considereu la funció $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba que representa $f(x)$, en el punt d'abscissa $x = 2$.

b) Quina és la funció que dóna el pendent de la recta tangent en cadascun dels punts de la corba?

c) Calculeu el punt de la corba que representa $f(x)$ en el qual el pendent de la recta tangent és màxim. Trobeu el valor d'aquest pendent màxim.

Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt; apartat c) 2 punts. Total: 4 punts.

Resolució:

a) El valor de la funció en $x=2$ és $f(2)=\dfrac{1}{5}$. La funció derivada és $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Per tant, $f'(2)=-\dfrac{4}{25}$. Així, la recta tangent té per equació:

$\boxed{y-\dfrac{1}{5}=-\dfrac{4}{25}(x-2)}$ o bé $\boxed{4x+25y-13=0}$.

b) Es tracta de la funció derivada ja calculada $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

c) Per trobar en quin punt el pendent és màxim hem de calcular la derivada de $f'(x)$ i igualar-la a 0.

$f''(x)=\dfrac{-2(1+x^2)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$. El signe de $f''(x)$ coincideix amb el del seu numerador $6x^2-2=2\left(3x^2-1\right)$, que passa (per x creixent) de positiu a negatiu en $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ i de negatiu a positiu en $\boxed{x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$. Per tant, el màxim s'obté per $\boxed{x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$. El punt màxim és $\boxed{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4}\right)}$, i el valor del pendent màxim és

$\boxed{f'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$