2 El benefici $B(x)$ (expressat en milers d'euros) que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte és representat per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad \text{per a} \quad 50 \leq x \leq 250.$$

a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut?
b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3.900 milers d'euros?
c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim?
d) Quina quantitat d'unitats ha de vendre per no tenir pèrdues?

Puntuació per cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.

Resolució:

a) $B(110) = 4800$ milers d'euros. (Es pot calcular per Ruffini o bé substituin x per 100

b) Si $B(x) = 3900$ resulta l'equació: $3900 = -x^2 + 300x - 16100$ o de forma equivalent $x^2 - 300x + 20000 = 0$, d'on resulten $x_1 = 200$ i $x_2 = 100$. Per tant pot haver venut 100 o 200 unitats de producte.

c) Per obtenir el benefici màxim hem d'igualar a 0 la derivada de $B(x)$ que representa una paràbola amb un vèrtex amb màxim. Tenim $B'(x) = -2x + 300$. Per tant el màxim s'obté per $x_M = 150$, valor pel qual el benefici és $B(150) = 6400$ milers d'euros.

d) Per no tenir pèrdues cal que $B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \geq 0$. Resolent la igualtat obtenim els extrems del segment on $B(x) \geq 0$. Aquests són:

$$x = 150 \pm \sqrt{22500 - 16100} = \left\langle \begin{matrix} 230 \\ 70 \end{matrix} \right. .$$

Per tant no tindrà pèrdues per $70 \leq x \leq 230$.

3 Si una joguina es ven a 130 €, la compren 1000 persones. Per cada euro que augmenta aquest preu, disminueix en 50, respectivament, el nombre de compradors.

a) Feu un gràfic del nombre de joguines que es venen en funció del preu de venda i doneu la fórmula que l'expressa.

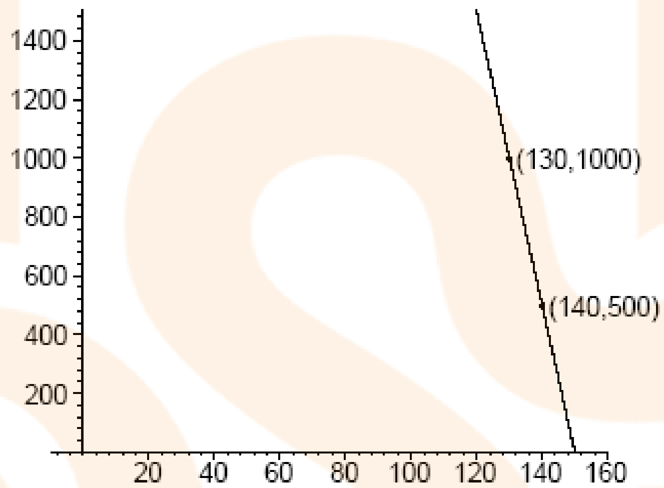
b) El preu de cost d'una joguina és de 80 €. Calculeu el preu p, que dóna un benefici total màxim.

c) Trobeu el nombre de joguines que es venen si el preu és p i calculeu-ne el benefici màxim.

Puntuació: apartat a) 2 punts; apartat b) 1 punt; apartat c) 1 punt. Total: 4 punts.

Resolució:

a) Gràfica del nombre de joguines que es venen en funció del preu:



L'equació de la gràfica serà: $\boxed{v(p) = 1000 - 50(p-130) = -50p + 7500}$.

b) El benefici total serà el nombre de joguines venudes $v(p)$ multiplicat pel benefici en cada una que és $p-80$. Per tant la funció benefici total en termes del preu de venda serà:
$B(p) = v(p)\cdot(p-80) = (7500-50p)(p-80) = -50p^2 + 11500p - 600000$.

La gràfica d'aquesta funció és una paràbola amb un màxim en el seu vèrtex que correspon a $\boxed{p = \frac{11500}{100} = 115\ €}$.

c) El nombre de joguines venudes serà $\boxed{v(115) = -50\cdot 115 + 7500 = 1750}$, i el benefici màxim $\boxed{B(115) = (7500-50\cdot 115)(115-80) = 1750\cdot 35 = 61250\ €}$.

4 Disposem de material per poder impermeabilitzar 200 m^2 de superfície. Volem fer una bassa de base rectangular en què la llargada mesuri el triple que l'amplada i amb la profunditat adequada per gastar tot el material. Interessa que el volum d'aigua que càpiga a la bassa sigui màxim.

a) Escriviu la relació que hi ha entre l'altura i el costat petit de la base de la bassa.
b) Escriviu la funció que dóna la capacitat de la bassa en funció del costat petit de la base.
c) Calculeu les dimensions de la bassa perquè la capacitat sigui màxima. (Els resultats s'han de precisar fins als centímetres.)
d) Determineu-ne el volum.

Puntuació de cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.

Resolució:

a) Anomenem x al costat petit de la base i y a la profunditat. La superfície total a impermeabilitzar és $S = 3x \cdot x + 2x \cdot y + 2 \cdot 3x \cdot y = 3x^2 + 8xy$, que ha de ser igual a 200. Per tant la relació demanada és $\boxed{3x^2 + 8xy = 200}$.

b) El volum de la bassa, expressat en termes de x, serà

$$\boxed{V = 3x \cdot x \cdot y = 3x^2 y = 3x \cdot \frac{200 - 3x^2}{8}}.$$

c) Per tal que la capacitat sigui màxima igualem la derivada a 0 per obtenir els extrems relatius. $V'(x) = \frac{3}{8}\left(200 - 9x^2\right)$, i igualant a 0 obtenim $x^2 = \frac{200}{9}$. Dels dos valors de x, únicament un és positiu i té sentit en el problema. Per tant, $V(x)$ té un extrem relatiu per $\boxed{x = \frac{10\sqrt{2}}{3} = 4,71 \text{ m}}$. Es tracta d'un màxim ja que la funció és una paràbola amb vèrtex cap a munt (el signe del coeficient de x^2 és negatiu). Per tant és el valor buscat. El costat llarg serà

$\boxed{3x = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ m}}$, i la profunditat $\boxed{y = \frac{200 - 3x^2}{8x} = \frac{200 - \frac{200}{3}}{\frac{80\sqrt{2}}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 3,54 \text{ m}}$.

d) Finalment el volum és $\boxed{V = \frac{10\sqrt{2}}{3} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{500\sqrt{2}}{3} = 235,702 \text{ m}^3}$.