1 Tenim dues caixes de llibres A i B. Si passem 12 llibres de la caixa A a la B, totes dues caixes tindran la mateixa quantitat de llibres. Si passem 12 llibres de la B a la A, la caixa A tindrà el triple de llibres que la caixa B. Quants llibres conté cada caixa?

Resolució:

Sigui:

- x el nombre de llibres de la caixa A
- y el nombre de llibres de la caixa B

Per fer el plantejament de les equacions que ens permetin resoldre la qüestió, és aconsellable fer-se el següent esquema:

Caixes	Situació inicial	Passem 12 llibres de A a B	Passem 12 llibres de B a A (*)
A	x llibres	x – 12	x + 12
B	y llibres	y + 12	y – 12
		Ens diuen que les dues caixes tenen la mateixa quantitat de llibres, per tant, podem escriure: x – 12 = y + 12	Ens diuen que la caixa A té el triple de llibres que la B, per tant, podem escriure: x + 12 = 3(y – 12)

Hem de resoldre el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x-12=y+12 \\ x+12=3(y-12) \end{array}\right\}$$

i ho podem fer fàcilment per reducció:

$$\left.\begin{array}{l} x-12=y+12 \\ x+12=3(y-12) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-12=y+12 \\ x+12=3y-36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y = 24 \\ x-3y=-48 \end{array}\right\}$$

$$\text{Restant aquestes dues equacions:} \quad 2y=72 \Rightarrow y = \text{36 llibres a la caixa B}$$

I podem obtenir x per substitució a partir de la 1a equació de l'últim sistema:

$$x = y + 24 = 36 + 24 = \text{60 llibres a la caixa A}$$

(*) Hi ha una certa ambigüitat en l'enunciat doncs no ens diuen si els 12 llibres de B a A es passen a partir de la situació inicial o després d'haver passat 12 llibres de A a B. Si el pas de llibres de B a A es fes després d'haver passat llibres de A a B, l'esquema seria:

Caixes	Situació inicial	Passem 12 llibres de A a B	Passem 12 llibres de B a A (*)
A	x llibres	x – 12	x – 12 + 12 = x
B	y llibres	y + 12	y + 12 – 12 = y
		Equació que podem escriure: x – 12 = y + 12	Equació que podem escriure: x = 3y

Aleshores, hauríem de resoldre el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-12=y+12 \\ x=3y \end{array}\right\}$$

i, per simple substitució, podeu comprovar que aquest sistema té les solucions:

x = 36 llibres a la caixa A, i y = 12 llibres a la caixa B

Pensem que aquesta interpretació i resolució del problema hauria de ser acceptada.

3 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a i b són nombres reals, trobeu els valors de a i b que fan que les dues matrius commutin, és a dir, que fan que es compleixi $A \cdot B = B \cdot A$.

[2 punts]

Resolució:

Calculem A·B i B·A amb la intenció d'igualar-ho i veure què passa:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + a \cdot 0 & 1 \cdot b + a \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot b + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + b \cdot 0 & 1 \cdot a + b \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot a + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es veu que A·B = B·A per a qualssevol valors de A i de B, per tant A i B commuten per a qualssevol valors de a i de b.

4 La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) El sistema, és compatible o incompatible? Raoneu la resposta.
b) En cas que sigui compatible resoleu-lo.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 1 punt. Total: 2 punts]

Resolució:

a) Calculem els rangs de les matrius del sistema i de la matriu ampliada. Com que una fila de les dues matrius és de zeros, ja podem prescindir d'ella.

La matriu del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ té rang 2, la matriu ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ també té rang 2 i el nombre d'incògnites és 3. Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) Resolem el sistema en funció de z:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = -2y + z \\ y = 1 - 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = -2(1-2z) + z = 5z - 2 \\ y = 1 - 2z \end{array}\right\}$$

I la solució es pot expressar:

$$\left.\begin{array}{l} x = 5z - 2 \\ y = 1 - 2z \\ z = z \end{array}\right\}$$

O bé $(x,y,z) = (-2,1,0) + t(5,-2,1)$

5 Considereu el sistema d'equacions $\begin{cases} px + 7y + 8z = 1370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1395 \end{cases}$

a) Discutiu-lo en funció del paràmetre p.
b) Doneu la interpretació geomètrica en els casos en què el sistema és incompatible.
c) Resoleu el sistema per a $p = 6$.

Resolució:

a) Podem enfocar la discussió de dues formes: per esglaonament o utilitzant determinants.

Per esglaonament:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 7 & 8 & 1370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1395 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1395 \\ p & 7 & 8 & 1370 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & p-7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 9-p & 1365-200p \end{array}\right)$$

i veiem que haurem d'estudiar tres casos: p=7, p=9 i p≠7 i p≠9.

Utilitzant determinants:
El determinant de la matriu del sistema és

$$\begin{vmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{vmatrix} = 8p + 49 + +8p - 56 - 56 - p^2 = -p^2 + 16p - 63$$

té per arrels p=7 i p=9; també veiem que haurem d'estudiar els tres casos: p=7, p=9 i p≠7 i p≠9.

Discussió:

Cas p=7: ens queden les matrius $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 7 & 8 & 1370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & 7 & 8 & 1395 \end{array}\right)$ on ja es veu clarament que la 1a i 3a fila fan que el sistema sigui incompatible.

Cas p=9: ens queden les matrius $\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 7 & 8 & 1370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & 9 & 8 & 1395 \end{array}\right)$. La matriu del sistema té rang < 3 (si es mira l'esglaonament es veu que té rang = 2) i la matriu ampliada té rang 3 (es pot veure a partir de l'esglaonament o trobant un menor no nul d'ordre 3). En aquest cas, el sistema també és incompatible.

Cas p≠7 i p≠9: les dues matrius tenen rang 3 i el sistema és compatible determinat.

b) Aquesta pregunta no correspon a les Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials. Per error us hem posat un examen de la modalitat científico-tecnològica, i a questa pregunta no la podeu fer. De totes formes, les preguntes a) i c) sí que són possibles preguntes d'una prova de Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials.

c) Quan p=6 (sistema compatible determinat), els sistema pot ser resolt per qualsevol mètode (Gauss, Cramer, ..). Aprofitant que tenim les matrius esglaonades:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 8 & 1370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & 6 & 8 & 1395 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & 6 & 8 & 1395 \\ 6 & 7 & 8 & 1370 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 165 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 200\text{-}y\text{-}z = 200\text{-}60\text{-}55 = 85 \\ y = 5\text{+}z\text{=}5\text{+}55 = 60 \\ 3z = 165 \Rightarrow z = 55 \end{cases}$$