1

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ t & 2\end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix}-1 & t & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) $$M\cdot N \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ t & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & t & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2-t & t^2 & 2t-2\end{pmatrix}$$

- Un cop calculada la multiplicació, per veure si és invertible o no, fem el determinant $|M\cdot N|$ i l'igualem a "0"

$$|M\cdot N|=\begin{vmatrix}1 & t & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2-t & t^2 & 2t-2\end{vmatrix}=2t-t^2-t^2+2t^2-2t=0$$

- Busquem la solució de "t". En aquest cas quedaria $0=0$ (les "t" queden eliminades) per tant la matriu NO ÉS INVERTIBLE PER CAP VALOR DE "T"

b) $$N\cdot M \rightarrow \begin{pmatrix}-1 & t & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ t & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t-1 & 2-t\\ 1-t & 0\end{pmatrix}$$

- Calculem el determinant

$$|N\cdot M|=-(1-t)\cdot(2-t)$$

- Busquem la solució de "t" igualant el determinant a "0"

$\boxed{t=1 \quad t=2}$ → LA MATRIU ÉS INVERTIBLE PER A QUALSEVOL VALOR DIFERENT DE $t=1$ i $t=2$.

④ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

↳ com ja tenim calculat A^2 podem utilitzar la matriu A^2

↳ si us hi fixeu és la matriu d'identitat en negatiu.

$A^6 = A^3 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

↳ al multiplicar dues matrius d'identitat negatives, com $- \cdot - = +$ el resultat serà la matriu d'identitat en positiu.

b) $(A^5)^{-1}$

- No cal calcular A^5 ni fer la inversa.

Sabem que la matriu d'identitat és $A^6 = A \cdot A^5$, per tant, la inversa de A^5 serà A

Selectivitat.io

5

$$M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$$

a) Calculem primer el determinant i l'igualem a "0"

$$|M| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{vmatrix} = x^2 - (-1)(y^2+1) = \boxed{x^2+y^2+1=0}$$

Com que $x^2+y^2+1 \geq 0$ els valors, siguin quins siguin, seran sempre diferents a "0" ja que $x^2+y^2 \geq 0$. Per tant és INVERTIBLE

b) $x=1 \quad y=1 \rightarrow M^{-1}$

- Substituim a la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculem el determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-2) = \boxed{3}$$

- Calculem la transposada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculem l'adjunta i canviem signes $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & +1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$ - Dividim per determinant $$\boxed{\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix}}$$

3

Selectivitat.io

⑥

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Perquè una matriu sigui inversa d'ella mateixa, s'ha de cumplir que $A \cdot A = I$

↳ matriu identitat

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Fem ~~la~~ el càlcul $A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+b & 1 \end{pmatrix}$

• Igualem $A \cdot A = I$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ ab+b = 0 \\ 0 = 0 \\ 1 = 1 \end{array}\right\} \text{Resolem el sistema}$$

$a^2 = 1 \rightarrow \boxed{a = \pm 1}$

Subst $a = -1$

$-b + b = 0$

$\boxed{0 = 0}$

Subst. $a = 1$

$b + b = 0$

$2b = 0 \quad \boxed{b = 0}$

• Com "a" ens ha donat dos resultats

→ Si $a = 1$ $\quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

→ Si $a = -1$ $\quad \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}}$

Poso "b" ja que és per qualsevol valor de "b" ja que ens ha donat $0 = 0$

5

a) El determinant no depèn de l'ordre de la matriu, per tant, el determinant d'una matriu d'ordre 3 i d'ordre 2 poden ser iguals.

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = \det B$

- Calculem $|A|$ i $|B|$

$\left.\begin{array}{l} |A| = p-2 \\ |B| = 4-p^2 \end{array}\right\}$ Igualem els dos determinants

$p-2 = 4-p^2$

$p^2+p-6=0$ a resolem l'equació de 2° grau

$\boxed{\begin{array}{l} p=-3 \\ p=2 \end{array}}$

Selectivitat.io