

## ENUNCIATS PROBLEMES PAU ÀLGEBRA (2005-2009)

1. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$ . Calculeu el valor dels paràmetres  $a$  i  $b$  perquè

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Solució

Calculem el valor de la matriu  $A^2$ ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a-b & b^2 \end{pmatrix}.$$

Quan igualem aquest resultat a la matriu  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  ens queden les equacions  $a^2 = 1$ ,  $a - b = -2$  i  $b^2 = 1$ . La segona equació permet assegurar que  $a = b - 2$ . Llavors, la primera equació és  $(b - 2)^2 = 1$  que té per solucions  $b = 3$  i  $b = 1$ ; la tercera equació té per solucions  $b = 1$  i  $b = -1$ . El valor que les compleix simultàniament és  $b = 1$ ; d'aquí,  $a = 1 - 2 = -1$ .

També es pot treballar de la forma explicitada a continuació.

De la primera equació, resulta  $a = \pm 1$ ; igualment, de la tercera en deduïm que  $b = \pm 1$ . Ara cal comprovar aquests valors en la segona equació.

- Quan  $a = 1$  i  $b = 1$ , tenim que  $a - b = 0$ .
- Per  $a = 1$  i  $b = -1$ , surt que  $a - b = 2$ .
- Si  $a = -1$  i  $b = 1$ , ens queda que  $a - b = -2$ .
- Finalment, quan  $a = -1$  i  $b = -1$ , tenim que  $a - b = 0$ .

Així l'única solució és  $a = -1$  i  $b = 1$ .

2. De tres nombres,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , sabem el següent: que el primer més el segon sumen 0; que el primer més el tercer sumen 1; que la suma de tots tres és 0 i, per acabar, que el primer multiplicat per un nombre  $k$  més el doble de la suma del segon i del tercer dóna 1.

- a) Què podeu dir del valor de  $k$ ?  
b) Quant valen els tres nombres?

## SOLUCIÓ

a) [2 punts] Els nombres han de ser solució del sistema:

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x+z &= 1 \\ x+y+z &= 0 \\ kx+2(y+z) &= 1 \end{cases}$$

Podem optar per dos maneres de resoldre el problema. Una és resoldre el sistema format pels tres primeres equacions:  $x=1$ ;  $y=-1$ ;  $z=0$ . Ara, substituint a la quarta equació, tenim que  $k=3$ .

També podem discutir el sistema segons els valors de  $k$ . Si triangulem per Gauss la matriu ampliada del sistema, tindrem:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-k & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 3-k \end{array}\right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 3-k \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right). \end{aligned}$$

Es veu clar que, per tal que el sistema sigui compatible,  $k=3$ .

b) [2 punts] Per  $k=3$ , el sistema es pot resoldre a partir de la matriu triangulada de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y &= 0 \\ -y+z &= 1 \\ z &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 0 \end{cases}$$

3. Considereu el sistema següent en funció del paràmetre real  $a$ :

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax + y = 3. \end{cases}$$

- a) Discutiu-lo en funció del paràmetre  $a$ .  
b) Resoleu els casos compatibles.

**SOLUCIÓ. [2 punts]** Per Gauss,  $\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1+a^2 & 3-a \end{pmatrix}$ . Per a qualsevol valor de  $a$ , el rang de la matriu del sistema és 2 i coincideix amb el de la matriu ampliada i el nombre d'incògnites. El sistema és, doncs, compatible determinat per a tot valor de  $a$ .

(O bé, el determinant del sistema és  $\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1+a^2$  que és sempre diferent de 0. El sistema és, doncs, compatible determinat per a tot valor de  $a$ .)  
La solució és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+3a}{1+a^2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3-a}{1+a^2}.$$

4. La matriu següent expressa els preus unitaris, en euros, de quatre articles,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ , procedents de les fàbriques  $f1$ ,  $f2$  i  $f3$ :

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}.$$

Si una comanda és representada per un vector fila  $C = (x \ y \ z \ t)$ , què representa cadascun dels elements del resultat del producte  $C \cdot P$ ? Si volem comprar 25 unitats de  $A$ , 30 de  $B$ , 60 de  $C$  i 75 de  $D$ , quina de les fàbriques ens ofereix el millor preu?



**SOLUCIÓ [2 punts]** Com que la matriu té 4 files i 3 columnes, és clar que cada columna representa la fàbrica i cada fila el producte. Així, una unitat del producte B de la fàbrica 3 té un preu de 12 € (fila 2, columna 3). El producte  $C \cdot P$ ,

$$C \cdot P = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 34x + 11y + 23z + 25t & 40x + 8y + 27z + 21t & 36x + 12y + 32z + 30t \end{pmatrix}$$

és una matriu fila 1x3 i cada element representa el COST de la comanda en cada fàbrica. Pel cas concret  $C = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 60 & 75 \end{pmatrix}$ , el cost de la comanda en cada fàbrica és  $\begin{pmatrix} 4435 & 4435 & 5430 \end{pmatrix}$ . En conseqüència, tant la fàbrica f1 com la f2 ens ofereixen el millor preu, 4435€.

5. En un sistema hi ha, entre d'altres, aquestes dues equacions:

$$x + 2y - 3z = 5 \quad \text{i} \quad 2x + 4y - 6z = -2.$$

Què podeu dir de les solucions del sistema?

**SOLUCIÓ [2 punts]** El rang de la matriu  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$  és 1, mentre que el rang de la matriu  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$  és 2. Això ens diu que les dues equacions donades són incompatibles. Qualsevol sistema que les contingui, també serà incompatible.

6. Esbrineu si el sistema següent pot ser compatible indeterminat per a algun valor del paràmetre  $m$ .

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x + 4y + 3z &= 0 \\ x + y + mz &= 0 \end{aligned} \right\}$$

És incompatible per a algun valor de  $m$ ?

En primer lloc s'estudia el rang de la matriu de coeficients.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & m-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, si  $m = 1$   $\text{rang}(A) = 2$  i és igual a 3 per a la resta de valors de  $m$ .

Així, si  $m = 1$  el sistema és compatible indeterminat.

Finalment, com que el sistema és homogeni mai pot ser incompatible.

7. Donades les matrius  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calculeu  $A \cdot B$  i  $B \cdot A$ .

b) Comproveu que  $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ .

a)  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

b)  $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2$ , ja que al primer apartat es comprova que  $AB = -BA$ .

8. Sigui la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ . Determineu els valors de  $m$  per als quals

$\text{rang}(A) < 3$ . Pot ser  $\text{rang}(A) = 1$  per a algun valor de  $m$ ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m \\ 0 & 0 & 3-4m+m^2 \end{pmatrix}.$$

Si  $m^2 - 4m + 3 = 0$ , és a dir, si  $m = 1$  o  $m = 3$ ,  $\text{rang}(A) = 2 < 3$ .

Tal com es veu a les dues primeres files, el rang no pot valer 1 ja que mai poden ser proporcionals.

9. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ . Trobeu els valors de  $p$  i  $q$  que fan que es verifiqui  $A^2 = A$ . En aquest cas, raoneu sense calcular què val  $A^{10}$ .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ pq & p+q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$$

i la igualtat es compleix quan  $p = 0$  i  $q = 1$ .

Si la matriu verifica  $A^2 = A$ , llavors,  $A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A = A$ . Procedint de manera successiva, es pot veure que qualsevol altra potència de la matriu  $A$  també val  $A$ .

10. **Siguin**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

**a) Trobeu la matriu  $M$ , quadrada d'ordre 2, tal que  $M \cdot A = B$ .**

**b) Comproveu que  $M^2 = I_2$  (matriu identitat d'ordre 2); deduíu l'expressió de  $M^n$ .**



**Solució:**

a) Podem calcular  $M$  utilitzant la matriu inversa de la matriu  $A$ ,

$$M = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ -1/4 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

També es pot resoldre com un sistema d'equacions, posant  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ . Llavors,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3x + 2y = 3 \\ z + 2t = 2 \\ -3z + 2t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 3/4 \\ z = 1 \\ t = 1/2 \end{cases}$$

b) En efecte,  $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ . Amb això,  $M^n = \begin{cases} M, & \text{si } n \text{ és senar} \\ I_2, & \text{si } n \text{ és parell} \end{cases}$ .

**11. Donat el sistema d'equacions lineals**

$$\begin{cases} x + y + (m-1)z = 1 \\ x + (m-1)y + z = m-1 \\ (m-1)x + y + z = m+2 \end{cases}$$

**discutiu-lo en funció dels valors del paràmetre  $m$ .**

**Solució:**

Primerament es fa l'escalonament de la matriu ampliada,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 & m-1 \\ m-1 & 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 & 1 \\ 0 & m-2 & 2-m & m-2 \\ 0 & -m+2 & 2m-m^2 & 3 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 & 1 \\ 0 & m-2 & 2-m & m-2 \\ 0 & 0 & 2+m-m^2 & m+1 \end{pmatrix}; \quad 2+m-m^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1, \quad m = 2.$$

S'observa que els valors que cal estudiar separatament són  $m = -1$  i  $m = 2$ .

S'arriba a la mateixa conclusió igualant a zero el determinant de la matriu de coeficients

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 4 = -(m-2)^2(m+1).$$

Llavors, quan  $m$  és diferent de 2 i de -1, el sistema és compatible determinat.

Si  $m=2$ , la matriu ampliada, després d'escalonar, és  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$  i el sistema és incompatible ja que la matriu de coeficients té rang 1 i l'ampliada rang 2.

Finalment, si  $m=-1$  la matriu és  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$  i el sistema és compatible indeterminat ja que tant la matriu de coeficients com l'ampliada tenen rang 2.

12. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ , on  $a$  i  $b$  són nombres reals.

a) Calculeu el valor de  $a$  i  $b$  per tal que  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Segons els valors obtinguts en l'apartat anterior, calculeu  $A^3$  i  $A^4$ .

c) Si  $n$  és un nombre natural qualsevol, doneu l'expressió de  $A^n$  en funció de  $n$ .

### Solució:

a) Calculem  $A^2$  i igulem a la matriu que ens indiquen.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 2a \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'aquí, cal que  $(a+b)^2 = 1$ ,  $(a-b)^2 = 1$  i  $2a = 2$ . La solució de la tercera equació és  $a = 1$ . De la primera i tercera equació deduïm que  $b = 0$ .

b) La matriu obtinguda a l'apartat anterior és  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Llavors,

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) A la vista dels resultats obtinguts fins ara, l'expressió de la potència  $n$ -èsima de la matriu  $A$  és  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .



13. **Considereu el sistema d'equacions**

$$\begin{cases} 2x + y - (a-1)z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ 4x - (a+1)y + z = -2a \end{cases}$$

- a) **Discutiu-lo en funció del paràmetre  $a$ .**
- b) **Resoleu-lo quan sigui compatible indeterminat.**
- c) **En el cas (b), trobeu una solució del sistema en què  $x$ ,  $y$  i  $z$  tinguin valors enters.**

**Solució:**

- a) Escalonant la matriu ampliada del sistema ens queda

$$\begin{aligned} (A|b) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1-a & 4 \\ 4 & -a-1 & 1 & -2a \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -a-1 & 12 \\ 0 & -a+7 & -3 & 16-2a \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -a-1 & 12 \\ 0 & 0 & -a^2+6a-8 & 2a-4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

**Nota:** ens podem estalviar l'últim pas mirant si la segona i la tercera files de la matriu del sistema (no de l'ampliada) són proporcionals:

$$\frac{5}{-a+7} = \frac{-a-1}{-3} \Leftrightarrow -15 = a^2 - 6a - 7 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 8 = 0$$

Sigui d'una o altra manera, cal buscar els valor del paràmetre  $a$  per als quals  $-a^2 + 6a - 8 = 0$ . Les solucions d'aquesta equació de segon grau són  $a = 2$ ,  $a = 4$ . Llavors,

- Si  $a \neq 2$  i  $a \neq 4$ , tenim que  $\text{rang } A = \text{rang}(A|b) = 3$ . El sistema és compatible determinat.
- Si  $a = 2$ ,

$$(A|b) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

El sistema és compatible indeterminat, ja que  $\text{rang } A = \text{rang}(A|b) = 2$ .

- Si  $a = 4$ ,

$$(A|b) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right).$$

El sistema és incompatible, ja que  $\text{rang } A = 2 \neq \text{rang}(A|b) = 3$ .

- b) La resolució del sistema en el cas compatible indeterminat ens porta a què

$$y = \frac{12 + 3z}{5}, \quad x = \frac{4 + z}{5}, \quad \text{per a qualsevol valor de } z.$$

- c) Qualsevol valor de la forma  $z = 1 + 5n$  dóna lloc a solucions amb components enters.

En efecte, si  $z = 1 + 5n$ , llavors

$$x = \frac{4 + (1 + 5n)}{5} = 1 + n \quad \text{i} \quad y = \frac{12 + 3(1 + 5n)}{5} = \frac{15 + 15n}{5} = 3 + 3n.$$

Per exemple, per  $n = 0$ , la solució és  $x = 1$ ,  $y = 3$ ,  $z = 1$ .

14. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**a)** Calculeu  $A^2$  i  $A^3$ .

**b)** Determineu, raonadament, el valor de  $A^{60124}$ .

**Solució:**

$$a) A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$$

c) A la vista del resultat anterior, podem assegurar que  $A^6 = I_3$ . Llavors,

$$A^{60124} = A^{1020 \cdot 6 + 4} = (A^6)^{1020} \cdot A^4 = I_3 \cdot A^4 = A \cdot A^3 = -A.$$

15. Considereu un sistema de dues equacions amb tres incògnites.

a) Pot ser incompatible?

b) Pot ser compatible determinat?

Raoneu les respostes.

**Solució:**

a) Efectivament, un sistema de dues equacions amb tres incògnites pot ser incompatible. Per exemple, ho és

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}.$$

En general, un sistema  $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$  és incompatible si i sol si

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$  (observeu que aquesta és la condició per a què els plans representats per les dues equacions siguin paral·lels).

b) Un sistema de dues equacions amb tres incògnites no pot ser compatible determinat, perquè el rang de la matriu del sistema és, com a màxim, 2 (té solament dues files), mentre que el número d'incògnites és 3.

16. - Siguin  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) Comproveu que la inversa de  $A$  és  $A^2$ .

b) Comproveu també que  $A^{518} = B$ .



### Solució

a) Per comprovar que  $A^{-1} = A^2$ , cal veure que  $A \cdot A^2 = I$ , essent  $I$  la matriu identitat d'ordre 3. Calculem primer el valor de  $A^2$ ,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors,

$$A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tal com volíem.

Naturalment, la qüestió es pot resoldre calculant  $A^{-1}$  directament de la matriu  $A$  i comprovant després que  $A^{-1} = A^2$ , encara que no és aquest el procediment demanat; o sigui, en aquesta qüestió no es demana que l'estudiant sigui capaç de calcular la inversa d'una matriu  $3 \times 3$ .

b) Com que  $A \cdot A^2 = A^3 = I$ , tenim

$$A^{518} = A^{3 \cdot 172 + 2} = (A^3)^{172} \cdot A^2 = A^2 = B.$$

17. En la resolució pel mètode de Gauss d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites ens hem trobat amb la matriu següent:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right)$$

- a) Expliqueu, raonadament, quin és el caràcter del sistema inicial.  
b) Si és compatible, trobeu-ne la solució.

### Solució

a) Com que el rang de la matriu de coeficients del sistema i el de la matriu ampliada és dos, podem assegurar que el sistema inicial és compatible indeterminat.

b) El sistema inicial és equivalent al sistema  $\left. \begin{array}{l} 3x - 5y + 2z = -5 \\ y - 2z = 2 \end{array} \right\}$ , que té per solució  $x = (5 + 8z)/3$ ,  $y = 2 + 2z$ , on  $z$  és un paràmetre.

18. Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$ . Trobeu els valors dels paràmetres  $a$  i  $b$  perquè tingui rang 1.

### Solució

Escalonem la matriu,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & b-2a \\ 0 & a^2-2b \end{pmatrix}$ .

Perquè el rang sigui 1 cal que  $b-2a=0$  i  $a^2-2b=0$ . De la primera equació se'n dedueix que  $b=2a$ ; posant-ho a la segona queda  $a^2-4a=0$ ; és a dir,  $a=0$  o  $a=4$ . Llavors les solucions són:

$$a=0, b=0 \quad \text{o bé} \quad a=4, b=8.$$

També es pot plantejar l'exercici, per exemple, forçant que les dues columnes siguin proporcionals, però les equacions a resoldre seran les mateixes.

19. Donat el sistema  $\begin{cases} x+py=p \\ px+y=p \end{cases}$ :

a) Discutiu-ne el caràcter en funció del paràmetre  $p$ .

b) Resoleu-lo quan  $p=2$ .

### Solució

a) Escalonem la matriu ampliada del sistema,

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & p & p \\ p & 1 & p \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & p & p \\ 0 & 1-p^2 & p-p^2 \end{array} \right)$$

Analitzem el valor de l'element  $1-p^2$ . Tenim que  $1-p^2=0$  si i sol si  $p=\pm 1$ . Per tant,

- Si  $p \neq -1$  i  $p \neq 1$ , el sistema és compatible determinat, ja que el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada és 2, coincidint, a més a més, amb el número d'incògnites.
- Si  $p = -1$ , la matriu escalonada és  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$ . El rang de la matriu del sistema és 1 i el de l'ampliada és 2. El sistema és incompatible.
- Si  $p = 1$ , la matriu escalonada és  $\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ . El sistema és compatible indeterminat perquè el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada coincideixen (valen 1), però és inferior al número d'incògnites.

b) Per  $p=2$ , el sistema és  $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+y=2 \end{cases}$  o, escalonat,  $\begin{cases} x+2y=2 \\ -3y=-2 \end{cases}$ . La solució és  $x=2/3$ ,  $y=2/3$ .

20. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + 5y + z + a = 0 \\ (a-2)z + x + 2y - 1 = 0 \\ (a-1)y + (1-a)x + z + a + 2 = 0 \end{cases}$$

- a) Expliqueu, raonadament, si es tracta d'un sistema lineal homogeni.
- b) Construïu-ne la matriu de coeficients i la matriu ampliada.
- c) Trobeu els valors del paràmetre  $a$  per als quals el sistema no és compatible determinat, i estudeu el caràcter del sistema en cada un d'aquests casos.
- d) Resoleu-lo solament quan el conjunt de les seves solucions és una recta de  $\mathbb{R}^3$ .

### Solució

a) Un sistema d'equacions lineals és homogeni quan tots els termes independents són nuls, cosa que no passa al nostre cas; per exemple, el terme independent de la segona equació és  $-1$  (o  $1$ , si es considera translladat a la dreta de la igualtat). No és, doncs, un sistema homogeni.

b) La matriu de coeficients del sistema i la matriu ampliada són, respectivament,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & a-2 \\ 1-a & a-1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -a \\ 1 & 2 & a-2 & 1 \\ 1-a & a-1 & 1 & -a-2 \end{pmatrix}.$$

c) Escalonem la matriu ampliada per tal de calcular el rang que té, tant ella com la matriu de coeficients,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -a \\ 1 & 2 & a-2 & 1 \\ 1-a & a-1 & 1 & -a-2 \end{array} \right) \stackrel{(1)}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -a \\ 0 & -3 & a-3 & a+1 \\ 0 & 6a-6 & a & -a^2-2 \end{array} \right)$$



$$\stackrel{(2)}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -a \\ 0 & -3 & a-3 & a+1 \\ 0 & 0 & 2a^2-7a+6 & a^2-4 \end{array} \right)$$

En (1) s'ha restat la fila 1 a la fila 2 ( $F_2 - F_1$ ) i la fila 1 multiplicada per  $1-a$  a la fila 3 ( $F_3 - (1-a)F_1$ ); en (2) s'ha sumat la fila 2 multiplicada per  $2a-2$  a la fila 3 ( $F_3 + (a-2)F_1$ ).

Cal analitzar quins valors del paràmetre  $a$  fan que l'element de la tercera fila tercera columna sigui nul,

$$2a^2 - 7a + 6 = 0 \implies a = 2, a = 3/2.$$

Quan  $a = 2$  o  $a = 3/2$  el sistema no és compatible determinat.

Per  $a = 2$ , la matriu resultant de l'escalonament és  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ . En aquest cas,  $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2$ ; el sistema és compatible indeterminat (amb un grau de llibertat).

Per  $a = 3/2$ , la matriu resultant de l'escalonament és  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -7/4 \end{array} \right)$ , i el sistema és incompatible, ja que  $\text{rang } A = 2 < 3 = \text{rang } \bar{A}$ .

d) El conjunt de solucions del sistema és una recta a  $\mathbb{R}^3$  si i sol si es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Això passa per  $a = 2$ . Llavors, la solució és, per exemple,  $x = 1 - 2y$ ,  $z = -3 - 3y$ .