SOLUCIONS CÀLCUL INTEGRAL

1

a) Calculem els punts d'intersecció per parelles de funcions.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 2x, x = 0, y = 0 \Rightarrow \boxed{P = (0,0)}$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \; o \; x = 1$$

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow P = (0,0)$$

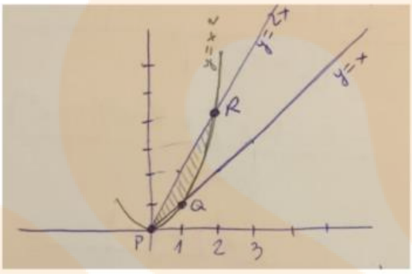
$$x = 1, y = 1 \Rightarrow \boxed{Q = (1,1)}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \; o \; x = 2$$

$$x = 0, y = 0 \Rightarrow P = (0,0)$$

$$x = 2, y = 4 \Rightarrow \boxed{R = (2,4)}$$

I quan en fem l'esbós, obtenim la representació gràfica següent:



b) Per calcular l'àrea del recinte, l'hem de descompondre en dues parts: d'una banda, la part limitada per la recta $y = 2x$ i, d'una altra, la recta $y = x$ i la part limitada per la recta $y = 2x$ i la paràbola.

$$S = \int_0^1 (2x - x)dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2} - 0 + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 3 - \frac{7}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

Observació: les descomposicions alternatives del recinte que siguin correctes també es donen per bones. Per exemple:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)dx - \int_0^1 (x - x^2)dx = \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 - \left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 =$$
$$= 4 - \frac{8}{3} - 0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{24 - 16 - 3 + 2}{6} = \boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

2

Si la funció té un extrem relatiu en el punt on $x = -3$ sabem que $P'(-3) = 0$. Com que $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, ens queda l'equació

$$3(-3)^2 + 2a(-3) + b = 0\,.$$

Per altra banda, tenim que

$$\int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2 = -\frac{5}{4}\,.$$

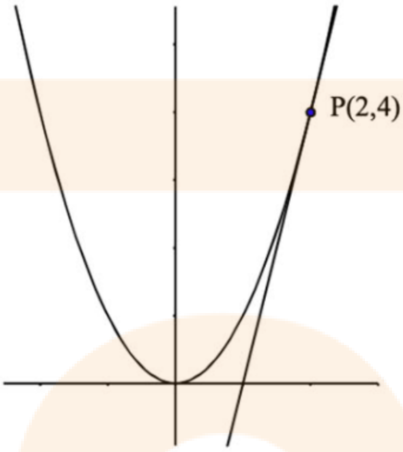
En definitiva, hem obtingut el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} -6a + b & = & -27 \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} & = & -\dfrac{7}{2} \end{array}\right\}\,,$$

que té per solució $a = 3$ i $b = -9$.

3

a)



Trobem el punt de tangència: P(2,4).

El pendent de la tangent és la derivada, per tant:

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ i $f'(2) = 4$

La recta tangent és doncs: $y - 4 = 4(x - 2)$, o sigui $y = 4x - 4$.

Els punts d'intersecció amb els eixos de coordenades els trobem quan *x* = 0 que obtenim *y* = -4 i quan *y* = 0 que obtenim *x* = 1. Així doncs els punts intersecció són $\boxed{(0,-4)}$ i $\boxed{(1,0)}$.

b) L'àrea de la regió es pot obtenir:

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left(x^2 - (4x - 4)\right)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left.\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{1}{3} + 2 - 4 = \boxed{\frac{2}{3}u^2}.$$

4

a) La funció $f(x)$ està definida per trossos que són funcions contínues (exponencial i polinòmiques), per tant només cal estudiar la continuïtat en $x = 0$ i en $x = 2$.

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = a$ és necessari que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 = f(0) \\ \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x^2}{4} + n\right) = n \end{cases}$$

i

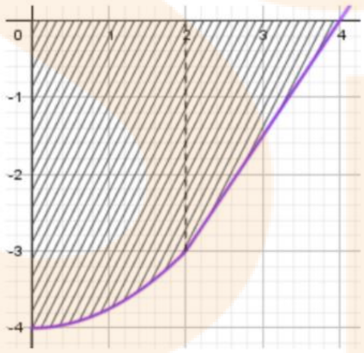
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{x^2}{4} + n\right) = 1 + n = f(2) \\ \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{3}{2}x + m\right) = 3 + m \end{cases}$$

Aleshores per a ser contínua en els dos punts cal que $\left.\begin{array}{r} n = 1 \\ 1 + n = 3 + m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} n = 1 \\ m = -1 \end{array}$

Per tant, si $n = 1$ i $m = -1$ la funció $f(x)$ és contínua per qualsevol nombre real.

b) Quan $n = -4$ i $m = -6$

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \le 0 \\ \frac{x^2}{4} - 4 & si \quad 0 < x \le 2 \\ \frac{3}{2}x - 6 & si \quad x > 2 \end{cases}$$



Àrea

$$A = \left|\int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - 4\right) dx\right| + \left|\int_2^4 \left(\frac{3}{2}x - 6\right) dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{12} - 4x\right)\right|_0^2 + \left|\left(\frac{3x^2}{4} - 6x\right)\right|_2^4 = \left|\frac{2}{3} - 8\right| + |-3| = \frac{31}{3} u^2$$

5

a)

La funció $f(x)$ és contínua en l'interval tancat [0, 2] per tractar-se de suma de funcions contínues en el seu domini com són la funció arrel quadrada i les funcions polinòmiques.

Els valors en els extrems $f(0) = -2 < 0$ i $f(2) = \sqrt{2} > 0$ tenen signe diferent, és a dir, $f(0) \cdot f(2) < 0$, per tant, sí que es compleixen les condicions del teorema de Bolzano.

Així doncs, la funció canvia de signe dins l'interval indicat i, per tant, aplicant el teorema de Bolzano, com a mínim existeix un punt dins l'interval obert (0, 2) en què la seva imatge és zero.

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ i, per tant, efectivament $x = 1$ és solució de l'equació $f(x) = 0$.

La funció derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 > 0$ és positiva en tot el domini de la funció i per tant la funció $f(x)$ és estrictament creixent i, per tant, després de tallar l'eix de les abscisses una vegada, la gràfica no pot tornar-lo a tallar.

b)

Com que $x = 1$ és l'únic punt en què la funció talla l'eix de les abscisses, la funció $f(x)$ té signe constant en l'interval (0,1) i, per tant, l'àrea que es demana es pot calcular amb

$$A = \left| \int_0^1 (\sqrt{x} + x - 2) \quad dx \right| = \left| \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Bigg|_0^1 \right| = \left| \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right| = \left| \frac{-5}{6} \right| = \boxed{\frac{5}{6}\ u^2}$$

a) Per poder avaluar la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ necessitem poder calcular el logaritme neperià del numerador (això vol dir que x sigui estrictament positiva) i poder dividir (és a dir, que x no sigui 0). Així doncs, $\boxed{dom(f) = (0, +\infty)}$.

Com que $x = 0$ no pertany al domini de la funció, $\boxed{\text{no hi ha intersecció amb l'eix } OY}$.
Com que $f(x) = 0 \Longrightarrow \ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$, $\boxed{\text{la intersecció amb l'eix } OX \text{ és } (1, 0)}$.

Per als intervals de creixement cal estudiar el signe de la funció derivada primera.
La funció derivada és $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.
Resolent $f'(x) = 0$ s'obté com a única solució $x = e$. Així doncs, els intervals de creixement són els següents:

$(0, e)$	$(e, +\infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$
f creixent	f decreixent

b) Comencem calculant una primitiva de la funció f (és quasiimmediata):

$$F(x) = \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

A l'interval $(1, e)$ la funció f és sempre positiva o zero. Per tant:

$$A = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \left.\frac{\ln^2(x)}{2}\right|_1^e = \frac{\ln^2(e)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \boxed{\frac{1}{2}\,u^2}.$$