SOLUCIONS DERIVABILITAT

1.

a) A partir de $f'(x)=3x^2-2ax+b$ i de la recta tangent $y = x + 3$, obtenim que $f(0) = 3$ i $m = f'(0) = 1$.

Les condicions per a la funció f en els punts d'abscissa 1 i 0 són:

$$\begin{cases} f'(1)=3-2a+b=0 \\ f'(0)=b=1 \\ f(0)=c=3 \end{cases} \Rightarrow a=2$$

b) La funció és $f(x)=x^3-2x^2+x+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+1$

Si fem $f'(x)=3x^2-4x+1=0$, les abscisses dels possibles extrems són $x = 1$ i $x = \frac{1}{3}$.

Amb la segona derivada $f''(x)=6x-4$ deduïm:

- $f''(1)=2>0$, per tant, hi ha $\boxed{\text{un mínim relatiu en } x=1}$
- $f''\left(\frac{1}{3}\right)=2-4<0$, per tant, hi ha $\boxed{\text{un màxim relatiu en } x=\frac{1}{3}}$

2.

a) $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

Per tal que un punt, x, sigui del domini de la funció g només cal que el radicand sigui positiu. És a dir $\boxed{Dom(g)} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+4 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{4}{3}\right\} = \boxed{\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)}$.

Una ordenada y serà del recorregut de la funció g, sempre que es pugui obtenir del càlcul de la imatge per g d'una abscissa x, és a dir $y = +\sqrt{3x+4}$. Per tant seran aquells valors positius de y per als quals la igualtat $y = +\sqrt{3x+4}$ té solució per a x. Però operant la igualtat obtenim que per a qualsevol y positiu sempre podem aillar la x com a $x = \frac{y^2-4}{3}$. Per tant, $\boxed{Rec(g) = [0, +\infty)}$.

b) Per tal que les dues funcions siguin tangents en $x = 0$ s'ha de satisfer $f(0) = g(0)$ i $f'(0) = g'(0)$.

Calculem les expressions de les funcions derivades:

$$f'(x) = \frac{1}{4}ae^{ax}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

Per tant $f(0) = g(0) \Rightarrow \frac{1+b}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{b = 7}$.

I $f'(0) = g'(0) \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{a = 3}$.

3.

(a) Perquè la funció $f(x)$ tingui un extrem relatiu en un punt, és necessari que la seva derivada valgui zero en aquest punt. D'acord amb la gràfica, això passa per $x = -3$, $x = 0$ i $x = 2$.

Abans del punt $x = -3$, la funció derivada és negativa i després és positiva; això vol dir que en aquest punt hi tenim un mínim relatiu.

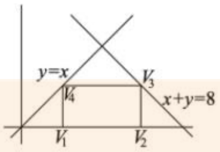
Amb un raonament paral·lel podem comprovar que en $x = 0$ la funció $f(x)$ té un màxim relatiu i en el punt $x = 2$ no hi ha ni màxim ni mínim (la derivada és negativa als dos costats); de fet, en aquest punt hi ha un punt d'inflexió.

(b) D'acord amb els signes de la derivada,

- La funció $f(x)$ és creixent a l'interval $(-3, 0)$.
- La funció $f(x)$ és decreixent a $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

4.

Siguin $V_1 = (a, 0)$ i $V_2 = (b, 0)$ els vèrtexs del rectangle que es troben a l'eix OX (la recta $y = 0$), amb $a < b$. Llavors, el vèrtex que es troba a la recta $y = x$, és de la forma $V_4 = (a, a)$; l'altre vèrtex, el que es troba a la recta $x + y = 8$, és de la forma $V_3 = (b, 8 - b)$. Com que els vèrtexs V_3 i V_4 han d'estar a la mateixa altura, cal que $a = 8 - b$.



La longitud de la base del rectangle és $b - a$ i la seva altura és $a = 8 - b$. En conseqüència la seva superfície és

$$S = (b - a) \cdot a = (b - 8 + b) \cdot (8 - b) = -2b^2 + 24b - 64\,.$$

Per trobar el màxim, derivem la funció superfície i igualem la derivada a zero.

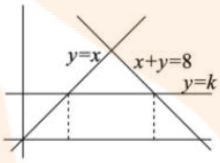
$$S'(b) = 24 - 4b\,; \quad 24 - 4b = 0 \Longrightarrow b = 6 \Longrightarrow a = 2\,.$$

Podem comprovar que el valor $b = 6$ correspon a un màxim utilitzant la segona derivada ($S''(b) = -24 < 0$), o bé argumentant que la funció superfície té per gràfica una paràbola amb coeficient de x^2 negatiu. També es pot fer comprovant el signe de la funció derivada abans (surt positiu) i després (és negatiu) del punt $b = 6$.

Els quatre vèrtex són $V_1 = (2, 0)$, $V_2 = (6, 0)$, $V_3 = (6, 2)$, $V_4 = (2, 2)$.

<u>Solució 2</u>

Sigui $y = k$ la recta on està el costat del rectangle paral·lel al que es troba a l'eix OX.



Els vèrtexs sobre la recta $y = k$ són (k, k) i $(8 - k, k)$. Les seves projeccions ortogonals sobre l'eix OX, que són els altres dos vèrtexs, donen $(k, 0)$ i $(8 - k, 0)$. La base del rectangle és $(8 - k) - k = 8 - 2k$ i la seva altura és, evidentment, k. Llavors, la funció que ens dóna l'àrea del rectangle és

$$f(k) = (8 - 2k)k = 8k - 2k^2\,.$$

La seva derivada és $f'(k) = 8 - 4k$. Quan la igualem a zero, s'obté $k = 2$. Els quatre vèrtexs són els trobats a la solució 1. La comprovació de què es tracta realment d'un màxim es realitza de la mateixa forma que en la solució anterior.