SOLUCIONS FUNCIONS

3

a) El pendent de la recta $x + 3y = 0$, és a dir $y = (-1/3)\,x$, és -1/3. Per a trobar una recta tangent paral·lela, cal trobar els punts en què la derivada de la funció és igual a -1/3.

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$3x^2 - 2x = -\frac{1}{3}$, per tant $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Resolent l'equació de segon grau, obtenim $x = \frac{1}{3}$.

Per a trobar la recta tangent demanada:

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ (com ja sabíem)

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{27}$

L'equació de la recta tangent és: $y + \frac{2}{27} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$ o, desenvolupant,

$\boxed{y = \frac{-x}{3} + \frac{1}{27}}$, o alternativament, $\boxed{9x + 27y = 1}$.

b) Per a calcular els punts de màxim o mínim i les inflexions ens cal tenir les derivades

$f(x) = x^3 - x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f''(x) = 6x - 2$

Per a calcular els candidats a màxim o mínim, resolem $f'(x)=0$, i obtenim $x = 0$ i $x = \frac{2}{3}$

Per a classificar aquest els punts singulars, els substituïm a la derivada segona:

$f''(0) = -2 < 0$, per tant, en $x = 0$ la funció té $\boxed{\text{un màxim relatiu, } M = (0,0)}$.

$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$, per tant, en $x = \frac{2}{3}$ la funció té $\boxed{\text{un mínim relatiu, } m = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)}$.

Per a obtenir els candidats a inflexió, resolem $f''(x)=0$, i obtenim $x = \frac{1}{3}$.

Per a decidir si és inflexió, mirem el signe de la derivada segona a l'entorn de l'abscissa $x = \frac{1}{3}$.

$f''(x) = 6x - 2$

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $f'' < 0$,

$\left(\frac{1}{3}, +\infty,\right)$, $f'' > 0$,

per tant, en $x = \frac{1}{3}$ hi ha un canvi de concavitat i, per tant, en aquest punt tenim l'única $\boxed{\text{inflexió, } I = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right)}$.

Observació: A l'enunciat es demana "els punts de la gràfica", per tant, cal explicitar l'abscissa i l'ordenada dels punts. En el cas de contestar correctament només les abscisses, s'aplicarà **només una vegada** la penalització de 0,25 punts.

3

a) En un punt $x = a$, l'equació de la recta tangent a una funció f té l'expressió

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

En el nostre cas tenim $f(x) = x\, e^{x-1}$ i $a = 1$
La funció derivada $f'(x)$ és $f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} + x \cdot e^{x-1} = (1 + x)e^{x-1}$.

Tenim doncs: $a = 1$, $f(a) = f(1) = 1\, e^0 = 1$, i $f'(a) = f'(1) = 2\, e^0 = 2$.

Per tant la recta tangent és $\boxed{y} = 2 \cdot (x - 1) + 1 \boxed{= 2x - 1}$.

b) Com que la funció f és derivable en tot el seu domini, la funció creixerà allà on la derivada sigui positiva i decreixerà allà on la derivada sigui negativa.

Tenim que $f'(x) = (1 + x)e^{x-1}$. Mirem si la funció s'anul·la en algun punt.
$f'(x) = 0$ porta a que $1+x = 0$ i per tant $x = -1$.

Si $x < -1 \Rightarrow 1 + x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ i per tant la funció és decreixent.
Si $x > -1 \Rightarrow 1 + x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ i per tant la funció és creixent.

$\boxed{\text{La funció és decreixent en l'interval } (-\infty, -1) \text{ i és creixent en l'interval } (-1, \infty).}$

1

a) El domini de la funció *f*, com a quocient de polinomis que és, són tots els nombre reals llevat aquells que anul·lin el denominador, en aquest cas el punt $x = 2$. En aquest punt s'anul·la el denominador i no el numerador i per tant tenim

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x-2} = \infty.$$

Per tant la funció *f* té una $\boxed{\text{única asímptota vertical en } x = 2.}$

Per al càlcul de les asímptotes horitzontal hem de calcular

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{x-2} = 1.$$

Per tant la funció *f* té una $\boxed{\text{asímptota horitzontal en la recta } y = 1.}$

Aleshores en tenir asímptota horitzontal quan $x \longrightarrow \pm\infty$ $\boxed{\text{no té cap asímptota oblícua.}}$

b) La recta $y = -5x + 4$ té pendent -5, per tant se'ns demana calcular la recta tangent en els punts que aquesta tingui pendent, és a dir derivada de *f*, -5.

Si derivem i igualem a -5 obtenim:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2) - (x+3) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Si $\frac{-5}{(x-2)^2} = -5$ aleshores $(x-2)^2 = 1$ i per tant $x - 2 = \pm 1$, és a dir $x = 1$ o $x = 3$.

Per tant tenim dues rectes tangents a calcular, totes dues amb pendent -5.

Quan $\boxed{x = 1}$ tenim $f(1) = -4$ i la recta tangent serà

$$\boxed{y = -5(x-1) + (-4) = -5x + 1}$$

Quan $\boxed{x = 3}$ tenim $f(3) = 6$ i la recta tangent serà

$$\boxed{y = -5(x-3) + 6 = -5x + 21}$$

3

(a) Perquè hi pugui haver un extrem relatiu de la funció en $x = -1$, cal que $f'(-1) = 0$. Com que $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, la relació buscada és $3 - 2a + b = 0$.

(b) En un punt d'inflexió la segona derivada ha de ser zero. Tenim que $f''(x) = 6x + 2a$; per tant, $f''(0) = 2a = 0$. Llavors, $a = 0$.

(c) És clar que la condició és $f(-2) = -8 + 4a - 2b + c = 0$.

(d) Cal resoldre el sistema $3 - 2a + b = 0$, $a = 0$, $-8 + 4a - 2b + c = 0$. La solució és $a = 0$, $b = -3$ i $c = 2$.