SOLUCIONS GEOMETRIA DE L'ESPAI

5.

a) Perquè els tres plans es tallin en un punt la matriu del sistema format per les tres equacions ha de ser compatible determinat. Cal que la matriu M del sistema tingui rang 3. Llavors la matriu ampliada també tindrà rang 3 i per tant el sistema serà compatible determinat.

$$M = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = 2a(a+1) + 2a + a + 1 - 2a - 2(a+1) - a(a+1)$$
$$= 2a^2 + 2a + 2a + a + 1 - 2a - 2a - 2 - a^2 - a = a^2 - 1$$

rang M = 3 quan $a^2 - 1 \neq 0$, és a dir $a \neq \pm 1$. En aquests casos els tres plans es tallen en un punt.

b) La situació representada mostra dos plans paral·lels i un altre que els talla.

En el cas $a = 1$ tenim:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 5 \\ x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$ En aquest cas els plans π_2 i π_3 són paral·lels i diferents ja que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0}$$

i no paral.lels amb el pla π_1 perqué

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

per tant, el pla π_1 els tallarà de manera que s'obtindrà, efectivament, la situació geomètrica de la figura.

2.

- La recta que es demana té vector director $n = (1,0,-1)$ i passa pel punt d'intersecció de r i π. Busquem el punt de la rectaz r,$P_r = (2,1+\lambda,\lambda)$, substituint-lo a l'equació del pla : $2-\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda=-1$.

El punt de la recta és (2, 0, -1)

Per tant, l'equació paramètrica de la recta buscada serà: $\left.\begin{array}{l} x=2+\mu \\ y=0 \\ z=-1-\mu \end{array}\right\}$

- Busquem els punts de r tals que $d(P_r,\pi)=\sqrt{8}$.

$$d(P_r,\pi)=\frac{|2-\lambda-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-1-\lambda|}{\sqrt{2}}=\sqrt{8} \Rightarrow |-1-\lambda|=4 \Rightarrow \lambda=-5 \; o \; \lambda=3$$

Per tant els punts són (2, -4, -5) i (2, 4, 3).

5.

a) L'equació del pla que passa pels punts A, B i C es pot obtenir (a partir, per exemple, del punt C i dels vectors directors $\vec{CB}$ i $\vec{CA}$): $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 5 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$

D'això en resulta $2z=0$, o sigui, $\boxed{z=0}$.

Ara trobem la intersecció amb la recta r:

$x=y-1=\frac{z}{2}$; per tant, els punts de la recta r són de la forma $(x,y,z)=$

$(\lambda,1+\lambda,2\lambda)$. Com que $z=0$, obtenim $\lambda=0$, i per tant, el punt d'intersecció és $\boxed{(0,1,0)}$.

b) Els punts P de la recta r són de la forma $P=(\lambda,1+\lambda,2\lambda)$.

Calculem el volum del tetraedre: $V=\frac{1}{6}\left|\det(\vec{CP},\vec{CA},\vec{CB})\right|$; per tant,

$$\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ \lambda+1 & 1 & 5 \\ 2\lambda & 0 & 0 \end{matrix}\right\|=2.$$

O sigui, $\frac{1}{6}\,|-4\lambda|=2$; és a dir, $|\lambda|=3$, i per tant, hi ha dues solucions: $\lambda=3 \; i \; \lambda=-3$, i d'aquí en resulta $\boxed{P_1=(3,4,6) \text{ i } P_2=(-3,-2,-6).}$

4

a) Un vector direcció de r és: $(1, 1, 0) \times (0, 2, 3) = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 1 & 2 \\ k & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3, -3, 2)$.

El vector $\vec{PQ}$ = Q- P = (2, 2, 2) o equivalentment (1, 1, 1).

Busquem un pla paral·lel als dos vectors que acabem de calcular, (3, -3, 2) i (1, 1, 1). Per tant, un vector normal del pla que busquem serà

$\vec{n}$ = (3, -3, 2) × (1, 1, 1) = (5, 1, -6).

L'equació del pla que passa per P i té vector normal $\vec{n}$ és:

$5(x-3) + (y+2) - 6(z-1) = 0.$

La seva equació general és $\boxed{5x + y - 6z = 7}$.

b) Calculem el vector $\vec{PQ} = Q - P$ = (2, 2, 2) o equivalentment (1, 1, 1) (si no s'ha fet en l'apartat anterior)

I el vector $\vec{PR} = R - P$ = (-2, 4, 2) o equivalentment (-1, 2, 1).

Calculem el vector normal al pla: $\vec{n}$ = (1, 1, 1) × (-1, 2, 1) = (-1, -2, 3).

Perquè els dos plans siguin paral·lels cal que els respectius vectors normals siguin proporcional, és a dir, que $\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} = \frac{m}{3}$. Per tant, $\boxed{m = -3}$.

Comprovem que els plans no són coincidents perquè el punt P, per exemple, no hi pertany, $x+2y-3z \neq 7$; efectivament $3-4-3 \neq 7$.

2.

a) Per a calcular el simètric de P, diguem-ne P', respecte del pla $\pi: x+y-z=0$ primer calcularem la projecció ortogonal del punt P sobre el pla π, diguem-ne Q, i després calcularem $P' = P + 2 \cdot \vec{PQ}$.

La recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla té per vector director el vector normal del pla $(1,1,-1)$ i per tant té equació paramètrica

$$(x, y, z) = (2+\lambda, 3+\lambda, 2-\lambda).$$

Calculem la intersecció del pla π amb aquesta recta:

$$2+\lambda+3+\lambda-(2-\lambda)=0$$
$$3\lambda=-3$$
$$\lambda=-1 \Rightarrow Q=(1,2,3)$$

$P' = (2,3,2) + 2 \cdot \big((1,2,3)-(2,3,2)\big) = (2,3,2) + 2 \cdot (-1,-1,1) = \boxed{(0,1,4)}$.

Observació: També es pot buscar el punt P' imposant que sigui un punt que compleixi que el vector $\vec{PP'}$ sigui proporcional al vector normal del pla i que el punt mig del segment $\overline{PP'}$ pertanyi al pla.

b) Si els plans han de ser paral.lels al pla $\pi: x+y-z=0$ aleshores hauran de tenir el mateix vector normal i per tant seran de la forma $\pi': x+y-z=D$.

Imposem ara que quedin a distància $\sqrt{3}$ del punt P.

$$d(P,\pi') = \frac{|2+3-2-D|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|3-D|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$
$$|3-D| = 3 \Rightarrow 3-D=3 \ o \ 3-D=-3$$

- Si $3-D=3 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \boxed{\pi': x+y-z=0}$.
- Si $3-D=-3 \Rightarrow D=6 \Rightarrow \boxed{\pi': x+y-z=6}$.