SOLUCIONS MATRIUS MCCS

③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) $(A-B)\cdot(A+B) = A^2 - B^2$

• Primer calculem $(A-B)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

• Calculem $(A+B)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

• Ara multipliquem el resultat de $(A-B)$ i $(A+B)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}}$$

• Calculem A^2 i B^2

(*) Com dona el mateix Sí es compleix la igualtat

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Restem els resultats obtinguts

$$\begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}}$$

b) • Calculem $B \cdot C$ i $C \cdot B$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ n & m \end{pmatrix}$$

• Com ens han donat la igualtat $B \cdot C = C \cdot B$

Igualem els dos resultats

$$\begin{pmatrix} m & n \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ n & m \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{matrix} m = -1 \\ n = 1 \end{matrix}}$$

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $A \cdot B$ i $B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Si no és una matriu quadrada, no coincidirà el nombre de files.

Ex: $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$ NO es pot fer!!

(5) Hem de fer un sistema

$$\left.\begin{array}{l} A-2B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ 2A+3B=\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

- Eliminem "A" multiplicant la primera equació per (-2)

$$-2A+4B=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$2A+3B=\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Aquesta la col·loquem igual}$$

$$7B=\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & -14 \end{pmatrix} \leftarrow \text{He calculat } \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

- Passem el 7 dividint

$$\begin{pmatrix} 7/7 & 21/7 \\ 14/7 & -14/7 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} B}$$

- Com ja tenim "B" podem buscar "A" substituint a una de les equacions (serveix qualsevol)

$$-2A+4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

passem dividint

$$-2A+\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad \boxed{A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Fem inversa

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -a \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b & a+c \\ 2+1 & -a+1 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+a & c+a \\ 2b-a & 2c-a \end{pmatrix}$

b) · ~~Suma~~

· Com ja tenim els càlculs fets, només hem d'igualar $A+B = A \cdot B$

$\begin{pmatrix} 1+b & a+c \\ 2+1 & -a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+a & c+a \\ 2b-a & 2c-a \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 1+b = b+a \\ a+c = c+a \\ 2+1 = 2b-a \\ -a+1 = 2c-a \end{array}\right\}$ Fem el sistema

$3 = 2b - a$

$3 - 2b = -a$

$\boxed{-3+2b = a}$

resultat d'aïllar "a"

$1+b = b+(-3+2b)$

$1+b = b-3+2b$

$\boxed{b=2}$

$-3+2\cdot(2) = a$

$\boxed{a=1}$

$-1+1 = 2c-1$ $\boxed{c = \frac{1}{2}}$

③ $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

inversa

a) $A\cdot X = I$

1r pas: calculem el determinant

$|A| = \begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix} = 2\cdot 2-3\cdot 1 = \boxed{1}$

2n pas: fem la trasposada (canviem columnes a files)

$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$

3r pas: fem l'adjunta i canviem els signes

$\begin{pmatrix}+&-\\-&+\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$

4t pas: dividim pel determinant

$A^{-1} = \begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$

- Ara apliquem l'equació $X = I\cdot A^{-1}$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}}$

b) $A \cdot X \cdot A = B \rightarrow A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$

- com ja hem calculat A^{-1} només hem de substituir

$$\boxed{Y = \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}}$$

4) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 - 6A + 5I = 0$

- Calculem $A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$
- Calculem $-6A = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -6x \end{pmatrix}$
- Calculem $5I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
- Substituïm a l'equació

$$\begin{pmatrix} x^2 - 6x + 5 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

Ho fem l'equació de 2º grau

$$\boxed{x = 1 \quad x = 5}$$

④ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$

a) $X + 2A = X \cdot A$

Inversa

- Aïllem l'equació $\rightarrow X(A - I) = 2A$

- Calculem $(A - I)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Fem inversa

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Multipliquem $2 \cdot A \cdot (A - I)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) $X \cdot A = B \rightarrow Y = B \cdot A^{-1}$; per tant és positiva ja que es pot realitzar perquè el nombre de columnes de B és igual al nombre de files de A^{-1}

$A \cdot Y = B \rightarrow Y = A^{-1} \cdot B$; positiva per la mateixa raó.

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$

a) $A\cdot B = B\cdot A$

- Calculem $A\cdot B$ i $B\cdot A$

$A\cdot B = \begin{pmatrix} 6+ab & -a \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

$B\cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3a \\ 2b+2 & ab \end{pmatrix}$

- Igualem les dues matrius

$\begin{pmatrix} 6+ab & -a \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3a \\ 2b+2 & ab \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 6+ab=6 \\ -a=3a \\ -6=2b+2 \\ 0=ab \end{array}\right\}$ Resolem el sistema

$\to -a=3a$

$\boxed{a=0}$

$\to -6=2b+2$

$-6-2=2b$

$-8/2=b$

$\boxed{b=-4}$

b) $A^2=2A$

- Calculem $A^2=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-2a & 2a \\ -4 & -2a \end{pmatrix}$

- Calculem $2A=\begin{pmatrix} 4 & 2a \\ -4 & -2a \end{pmatrix}$

• Igualem les dues matrius

$$\begin{pmatrix} 4-2a & 2a \\ -4 & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ -4 & -2a \end{pmatrix}$$

$4-2a=4$ → Podem agafar qualsevol igualtat

$\boxed{a=0}$

6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A\cdot B + X = C$ → $X = C\cdot(A\cdot B)^{-1}$

• Calculem $A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

• Calculem $C\cdot(A\cdot B)^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}}$

b) $C^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}$

calculem aquests primers i el que doni ho multipliquem per l'última matriu

NO HO FEM DE COP!!

(5) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $X+B\cdot C=A^2 \rightarrow X=A^2-B\cdot C$

- Calculem $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Calculem $B\cdot C=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$
- Substituim a la matriu

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}}$$