SOLUCIONS OPTIMITZACIÓ

1.

Si anomenem *x* l'amplada i *y* l'alçada de les pàgines, l'enunciat ens diu que la superfície de la pàgina ha de ser de 600 cm^2, és a dir que $xy = 600$.

Per tant, podem expressar l'alçada en funció de l'amplada, $y = \frac{600}{x}$.

L'amplada de l'àrea impresa serà, després de restar els marges laterals, *x*-4.

L'alçada de l'àrea impresa serà, després de restar els marges superior i inferior, *y*-5.

Per tant, la superfície a maximitzar és $S(x, y) = (x-4)(y-5)$.

Quan substituïm la *y* a l'expressió de *S* obtenim la superfície només en funció de *x*:

$$S(x) = (x-4)\left(\frac{600}{x} - 5\right) = 600 - 5x - \frac{2400}{x} + 20 = 620 - 5x - \frac{2400}{x}$$

Per a maximitzar *S* calculem primer les dues primeres derivades.

$$S'(x) = -5 + \frac{2400}{x^2}$$

$$S''(x) = -\frac{4800}{x^3}$$

Els candidats a màxim seran els punts que anul·lin la derivada primera, $S'(x)$. Quan fem $S'(x) = 0$, obtenim $5 = \frac{2400}{x^2}$ i, per tant, $x = +\sqrt{\frac{2400}{5}} = +\sqrt{480} = 4\sqrt{30}$.

(Observem que els valors negatius de *x* no tenen sentit per al problema.)

Per a comprovar que a $x = 4\sqrt{30}$ hi ha efectivament un màxim, substituïm el valor a la derivada segona i tenim $S''(4\sqrt{30}) < 0$. Per tant, l'amplada que maximitza l'àrea impresa és $\boxed{x = 4\sqrt{30} = 21{,}91\ cm}$.

L'alçada que li correspon serà $\boxed{y = \frac{600}{4\sqrt{30}} = \frac{600\cdot\sqrt{30}}{4\cdot 30} = 5\sqrt{30} = 27{,}39\ cm}$.

6.

a)

Pel teorema de Pitàgores sabem que $a^2 = x^2 + h^2$. Com que el volum del con val 120 cm^3, per la fórmula del volum tenim

$$120 = \frac{\pi \cdot x^2 \cdot h}{3}$$

i aïllant, obtenim $x^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h}$. Substituint x^2 a l'expressió inicial, s'obté la fórmula buscada.

b) La longitud de l'aresta és una funció positiva i tenim la longitud al quadrat expressada com a funció de h, per tant és suficient amb trobar els mínims de la funció

$$f(h) = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$$

quan $h \in (0, \infty)$. Tenim

$$f'(h) = 2h - \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$$

per tant, en igualar $F'(h) = 0$, s'obté $2h = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}$, $h^3 = \frac{180}{\pi}$ i $\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \simeq 3{,}86 \text{ cm}}$.

Es comprova que és un mínim, ja que $f'(x) < 0$ quan $x \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\right)$ i $f'(x) > 0$ quan $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}, \infty\right)$.

Alternativament, es pot treballar amb la funció

$$a(h) = \sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}$$

i s'obté com a derivada

$$a'(h) = \frac{h - \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2}}{\sqrt{\frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2}}$$

6.

a) L'àrea de la portalada serà la suma de l'àrea de la semicircumferència més la del rectangle inferior, és a dir

$$\frac{\pi\,(x/2)^2}{2} + xy = \boxed{\frac{\pi\,x^2}{8} + xy}$$

que és l'expressió proposada.

b) Que el perímetre sigui 20 m ens indica la restricció $\pi\frac{x}{2} + 2y + x = 20$, és a dir $\frac{\pi+2}{2}x + 2y = 20$.

D'aquesta condició podem aïllar la y i substituir-la a la funció de l'àrea per a maximitzar-la. Tenim $y = 10 - \frac{\pi+2}{4}x$ i per tant

$$A(x) = \frac{\pi\,x^2}{8} + x\left(10 - \frac{\pi+2}{4}x\right) =$$
$$= \frac{\pi}{8}x^2 + 10x - \frac{\pi+2}{4}x^2 = -\frac{\pi+4}{8}x^2 + 10x.$$

Per a maximitzar la funció, derivem i igualem la derivada a 0.

$$A'(x) = -\frac{\pi+4}{4}x + 10\,.$$

Quan fem $A'(x) = 0$, obtenim $\boxed{x = \frac{40}{\pi+4}\ metres}$.

Com que la derivada segona és $A''(x) = -\frac{\pi+4}{4} < 0$ independent del valor de l'abscissa del punt, en el nostre valor $x = \frac{40}{\pi+4}$ tindrem un màxim.

Quan $x = \frac{40}{\pi+4}$ el valor de y és $\boxed{y = 10 - \frac{\pi+2}{4}\frac{40}{\pi+4} = 10 - 10\frac{\pi+2}{\pi+4} = \frac{20}{\pi+4}\ metres}$.

6.

Solució

(a) Anomenem a a l'altura d'una de les cares de la tenda, tal com està indicat al dibuix. Llavors, la superfície total de les quatre cares de la tenda és $S(x) = 4\left(\dfrac{ax}{2}\right) = 2ax$. Com que aquesta superfície és de $300\,m^2$, tenim que $2ax = 300$, és a dir, $a = \dfrac{150}{x}$.

Per altra banda, d'acord amb el teorema de Pitàgores, $a^2 = h^2 + (x/2)^2$. Per tant,

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{150}{x}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{9\cdot 10^4 - x^4}}{2x}.$$

Amb això,

$$V(x) = \frac{1}{3}x^2 h = \frac{x\sqrt{9\cdot 10^4 - x^4}}{6}.$$

(b) Per a determinar el valor de x que fa màxim el volum, hem de derivar la funció volum i determinar els punts on la derivada s'anul·li.

$$V'(x) = \frac{1}{6}\left[\sqrt{9\cdot 10^4 - x^4} + \frac{x}{2\sqrt{9\cdot 10^4 - x^4}}\left(-4x^3\right)\right] = \frac{3\cdot 10^4 - x^4}{2\sqrt{9\cdot 10^4 - x^4}}.$$

Aquesta derivada val zero quan $x = \sqrt[4]{3\cdot 10^4} = 10\sqrt[4]{3} \simeq 13,1607$.

També es pot treballar amb la funció $f(x) = x^2(9\cdot 10^4 - x^4)$, resultat d'haver descartat els factors constants i haver elevat al quadrat la funció volum. Amb ella,

$$f'(x) = 18\cdot 10^4 x - 6x^5\,; \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\text{ o } x = 10\sqrt[4]{3}.$$

La primera d'aquestes solucions és absurda (si $x = 0$ no hi ha tenda) i la segona és la resposta correcta.