SOLUCIONS RECTA TANGENT

4

a) Que la recta tangent sigui horitzontal vol dir que té pendent zero. Per tant, ens estan demanant la recta tangent en aquells punts que la derivada sigui 0.

Calculem la funció derivada i la igualem a 0:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

La funció derivada només s'anul.la pel valor $x = 0$. Tenim $f(0) = 1$ i $f'(0) = 0$.

Per tant, l'equació de la recta tangent serà

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0(x-0) + 1 = 1$$

$$\boxed{y = 1.}$$

Comentari: per a l'equació de la recta tangent també es pot fer servir directament, en saber que és horitzontal, l'ordenada del punt de la gràfica.

b) El pendent de la recta tangent és la funció derivada. Per tant, ens estan demanant el màxim de la funció derivada. Els candidats a màxim de la funció derivada són els zeros de la funció derivada de la funció derivada, és a dir, els zeros de la derivada segona $f''(x)$. Calculem $f''(x)$, la igualem a 0 i resolem la igualtat.

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)\,2(1+x^2)\;\;2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)\;\;+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

Per tant, $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

A partir d'aquests valors singulars, els intervals de creixement i decreixement per a la funció derivada seran

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
Signe de f''	+	-	+
Creix/Decreix f'	↗	↘	↗

Per tant, el pendent serà màxim en el punt d'abscissa $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i ordenada

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

És a dir, al punt $\boxed{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)}$.

3

a) Tenim $y = x^3$ i per tant la seva derivada $y' = 3x^2$. I quan avaluem en $x = 2$ tenim $y(2) = 8$ i $y'(2) = 12$. Per tant la recta tangent que busquem és la recta que passa pel punt $(2, 8)$ i que té pendent 12, és a dir

$$\boxed{y =}\ 12(x-2)+8\ \boxed{= 12x - 16}.$$

b) Primer hem de trobar els punts d'intersecció entre les dues funcions. Igualant obtenim:

$x^3 = 3x - 2$, és a dir $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Si apliquem la regla de Ruffini obtenim $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2) = 0$ i per tant que les abscisses dels punts de tall són $x = -2$ i $x = 1$.

Per la continuïtat de les funcions l'ordre entre elles és el mateix al llarg de tot l'interval (-2, 1). Com que en $x = 0$ el valor de la corba és 0 i el valor de la recta és -2, la funció cúbica està més amunt que la recta i per tant el valor de l'àrea limitada serà

$$\int_{-2}^{1}\left(x^3 - (3x-2)\right)dx = \int_{-2}^{1}(x^3 - 3x + 2)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - (4 - 6 - 4) = \frac{3}{4} + 6 = \boxed{\frac{27}{4}\ u^2}$$

Observació: També es pot haver plantejat amb el valor absolut de la integral directament, sense fer el balanç de quina funció pren valors més grans.

6

(a) L'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt d'abscissa a és $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. De l'enunciat, sabem que $f(0) = 0$ ("passa per l'origen de coordenades") i de la gràfica en deduïm que $f'(0) = 1$. Llavors, l'equació de la recta buscada és $y = 0 + 1(x - 0)$; és a dir, $y = x$.

(b) Com que la funció $f(x)$ és derivable, els punts candidats a ser els seus extrems relatius tindran la derivada igual a zero. D'acord amb el gràfic, les abscisses d'aquests punts són $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ i $x_3 = 2$.

- En $x_1 = -3$ hi tenim un mínim, ja que en ell la funció derivada passa de ser negativa a ser positiva (és a dir, la funció $f(x)$ passa de ser decreixent a ser creixent).
- En $x_2 = 1$ hi ha un màxim. En efecte, la derivada passa de ser positiva (funció creixent) a ser negativa (funció decreixent).
- En $x_3 = 2$ torna a haver un mínim, per la mateixa raó que en x_1.