



## Sèrie 2

### RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella amb el número corresponent de la primera pàgina de l'examen.

1.

a)

[1,75 punts]

Anomenem  $x, y$  i  $z$  les unitats elaborades de l'opció clàssica, de rams petits i de rams grans, respectivament.

A partir de les condicions de l'enunciat s'obté el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 200 \\ x + 2y + 3z = 135 \\ x + y + z = 85 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 200 \\ 1 & 2 & 3 & 135 \\ 1 & 1 & 1 & 85 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 1 & 2 & 3 & 135 \\ 1 & 3 & 6 & 200 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 2 & 5 & 115 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 85 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

S'obté que  $z = 15$ ,  $y = 20$  i  $x = 50$ .

Per tant, s'han elaborat 50 unitats de l'opció clàssica, 20 rams petits i 15 rams grans.

b)

[0,75 punts]

Per saber els diners que ingressaran amb la venda de tots els rams hem de fer el producte  $50 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 15 \cdot 10 = 150 + 100 + 150 = 400$ .

S'obtidran, per tant, 400 euros de la venda de tots els rams.

Criteris de correcció: a) Plantejament del sistema: 0,25 p. cada equació.

Resolució del sistema: 1 p. b) Obtenció del diners que ingressaran: 0,75 p.



2.

a)

[1,25 punts]

La funció  $f$  té com a gràfica una paràbola que pren el valor màxim al vèrtex, ja que el coeficient de  $x^2$  és negatiu. Per trobar l'interval de temperatures entre les quals es produeix fruita només cal trobar els zeros de l'equació:

$$-x^2 + 46x - 360 = 0$$

La fórmula de l'equació de segon grau ens dona com a solucions  $x = 10$  i  $x = 36$ , és a dir, que el rang de temperatures entre les quals es produeix fruita és  $(10, 36)$ .

Si es mantingués l'hivernacle a 20 graus, s'obtidrien anualment  $f(20) = 160$  centenars de quilograms per hectàrea i any. Per tant, els ingressos per hectàrea serien de  $16.000 \cdot 1,2 = 19.200$  euros.

b)

[1,25 punts]

Per trobar la producció màxima, ens cal trobar el màxim de la funció anterior. Podem fer-ho calculant el vèrtex, o bé amb la funció derivada  $f'(x) = -2x + 46$ . Els candidats a extrems de la funció es produeixen quan  $f'(x) = 0$ , per tant, quan  $x = 23$ . En aquest cas verifiquem fàcilment que  $f'(x) > 0$  quan  $x < 23$  i que  $f'(x) < 0$  quan  $x > 23$  i, per tant, en el punt  $(23, f(23)) = (23, 169)$  la funció assoleix un màxim. Així doncs, la temperatura que maximitza la producció són 23 graus centígrads, i en aquest cas es produeixen 16.900 quilograms per hectàrea. Els ingressos per hectàrea són de  $16.900 \cdot 1,2 = 20.280$  euros.

Criteris de correcció: a) Obtenció del rang de temperatures: 0,75 p. Obtenció de la producció a 20 graus: 0,25 p. Obtenció dels ingressos a aquesta temperatura: 0,25 p. b) Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció de la producció a aquesta temperatura: 0,25 p. Obtenció dels ingressos a aquesta temperatura: 0,25 p.



3.

a)

[1,75 punts]

Resumim la informació en la taula següent:

Tipus de panera	Pernils per panera	Ampolles de cava per panera	Barres de torró per panera	Quantitat de paneres que hem de fer
A	1	1	5	$x$
B	2	3	2	$y$

Les condicions que tenim són:

$x$  indica la quantitat de paneres de tipus A que hem de fer:  $x \geq 0$

$y$  indica la quantitat de paneres de tipus B que hem de fer:  $y \geq 0$

Disposem de 40 pernils, per tant:  $x + 2y \leq 40$

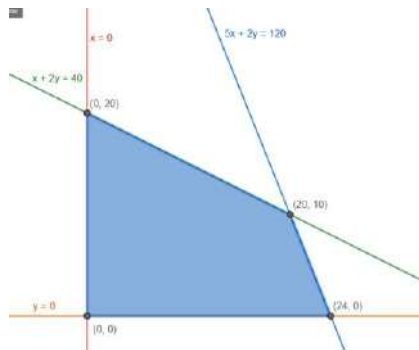
Disposem de 120 barres de torró, per tant:  $5x + 2y \leq 120$

Es vol fer la màxima la quantitat de paneres possible. Per tant, la funció objectiu és:  $f(x, y) = x + y$ , amb les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ 5x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Obtenim de la regió factible:



La regió factible està delimitada pels punts:

$$(0,0), (24,0), (20,10), (0,20)$$

Sabem que la funció objectiu assolirà el seu màxim en algun vèrtex de la regió factible. La taula següent recull el valor de la funció objectiu sobre cadascun dels vèrtexs:

Punts	$f(x, y) = x + y$
(0,0)	0
(24,0)	24
(20,10)	30
(0,20)	20

La funció objectiu  $f(x, y) = x + y$  assoleix el valor màxim en el vèrtex (20,10). Per tant, per maximitzar la quantitat de paneres, cal fer-ne 20 de tipus A i 10 de tipus B. D'aquesta manera obtindrem 30 paneres per als treballadors.



b)

[0,75 punts]

En aquest cas hem d'imposar que el nombre de paneres de cada tipus ha de ser igual. Per tant, ara tenim:

Tipus de panera	Pernils per panera	Ampolles de cava per panera	Barres de torró per panera	Quantitat de paneres que hem de fer
A	1	1	5	$x$
B	2	3	2	$x$

Si anomenem  $x$  la mateixa quantitat de paneres de cada tipus, ara tenim:

$$\begin{cases} x + 2x \leq 40 \\ 5x + 2x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 40/3 \\ x \leq 120/7 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 13,3 \\ x \leq 17,1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Per tant, es podran fer només 13 paneres de cada tipus i hi haurà paneres només per a 26 treballadors.

Criteris de correcció: a) Obtenció de les restriccions: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. Dibuix de la regió factible: 0,25 p. Obtenció dels vèrtex: 0,5 p. Obtenció del màxim: 0,25 p. b) Plantejament: 0,25 p. Resolució: 0,5 p.



4.

a)

[1,25 punts]

A l'instant inicial la població és de 6 centenars, per tant,  $P(0) = 6$ :

$$a + \frac{12 \cdot 0}{0^2 + b} = 6$$

Per tant, obtenim que  $a = 6$ .

D'altra banda, sabem que el màxim de la població s'assoleix a l'instant  $t = 2$ , per tant,  $P'(2) = 0$ . Calculem la derivada:

$$P'(t) = \frac{12 \cdot (t^2 + b) - 12t \cdot 2t}{(t^2 + b)^2} = \frac{-12t^2 + 12b}{(t^2 + b)^2}$$

Imposem que  $P'(2) = 0$ :

$$\frac{-12 \cdot 2^2 + 12b}{(2^2 + b)^2} = 0$$

D'aquí obtenim que  $-48 + 12b = 0$  i, per tant,  $b = 4$ .

Així, per tal que es compleixin les condicions del problema cal que  $a = 6$  i  $b = 4$ .

D'altra banda, observem que amb aquests valors dels paràmetres efectivament en  $t = 2$  hi ha un màxim perquè la derivada és positiva en l'interval  $[0,2)$  i negativa per a  $t > 2$ .

b)

[1,25 punts]

La població obté el seu màxim a l'instant  $t = 2$ :

$$P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2 + 4} = 9$$

Per tant, la població màxima és de 9 centenars de bacteris.

Calculem ara el límit per obtenir la població a llarg termini:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 6 + \frac{12t}{t^2 + 4} = 6 + 0 = 6$$

Criteris de correcció: a) Obtenció del valor de  $a$ : 0,5 p. Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del valor de  $b$ : 0,25 p. b) Obtenció de la població màxima: 0,5 p. Obtenció del límit: 0,75 p.



5.

a)

[1,5 punts]

Calculem el producte  $P \cdot A$ :

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix}.$$

Sabem que una matriu quadrada és invertible si el rang de la matriu és màxim, és a dir, en aquest cas si el rang és 2.

Aplicuem el mètode de Gauss. Si sumem a la segona fila la primera multiplicada per  $(3-a)$ , obtenim:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 8-5a \end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang de la matriu serà 2 i, per tant, la matriu  $P \cdot A$  serà invertible sempre que  $8-5a$  sigui diferent de zero. Com que  $5a-8=0 \rightarrow a=8/5$   
Obtenim que sempre que  $a \neq \frac{8}{5}$  la matriu obtinguda del producte de  $P \cdot A$  serà invertible.

b)

[1 punt]

Quan  $a=2$  tenim que

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre l'equació  $P \cdot A + X = I$ . Obtenim:

$$X = I - P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Càlcul dels producte  $P \cdot A$ : 0,5 p. Càlcul del rang de la matriu: 0,5 p. Obtenció del valor de  $a$  pel qual no és invertible: 0,5 p. b) Aïllar la  $X$ : 0,5 p. Càlcul de  $X$ : 0,5 p.



6

a)

[0,75 punts]

Sabem que  $R_e = R_0 \cdot (1 - p) = 15 \cdot (1 - 0,95) = 15 \cdot 0,05 = 0,75$ . Com que aquest valor és inferior a 1, segons el model, no hi ha risc d'una epidèmia de xarampió.

b)

[0,75 punts]

En el cas de la grip espanyola  $R_e = R_0 \cdot (1 - p) = 4 \cdot (1 - p)$ . Imposem que

$$4 \cdot (1 - p) < 1$$

Aïllant la  $p$  tenim que cal que  $p > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$ . Per tant, caldria vacunar més d'un 75% de la població per aturar l'epidèmia.

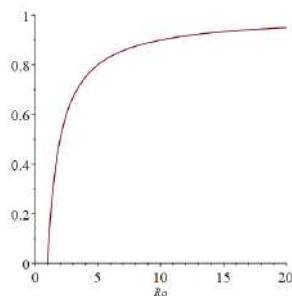
c)

[1 punt]

El llindar de vacunació és donat per  $R_0 \cdot (1 - p) < 1$ . Aïllant, obtenim que cal que  $p > 1 - \frac{1}{R_0}$ . Per tant, la funció que ens determina el llindar del mínim de vacunació necessària, en funció de  $R_0$ , és  $p(R_0) = 1 - \frac{1}{R_0}$ .

Per fer un esbós de la funció entre 1 i 20 podem buscar els valors de la funció en els dos extrems  $p(1) = 0$  i  $p(20) = \frac{19}{20} = 0,95$ . També veiem que la funció és sempre creixent perquè la derivada és  $p'(R_0) = \frac{1}{R_0^2} > 0$  i, per tant, no té extrems relatius.

La gràfica de la funció és:



Criteris de correcció: a) Càlcul i justificació que no hi ha risc d'epidèmia en aquest cas: 0,75 p. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul: 0,5 p. c) Obtenció de la funció: 0,5 p. Esbós de la funció: 0,5 p.